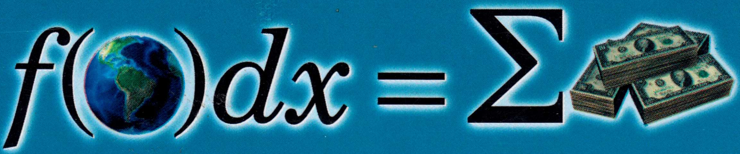
MODELOS FUNCIONALES Y APLICACIONES DIFERENCIALES



Epifanio Puma Huañec
Isabel Corbacho Carpio

2013

MODELOS FUNCIONALES
Y
APLICACIONES DIFERENCIALES

FUNCIONES

APLICACIONES COMERCIALES

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

DERIVADA DE FUNCIONES REALES

APLICACIONES DE LA DERIVADA
DE FUNCIONES REALES

EPIFANIO PUMA HUAÑEC
ISABEL CORBACHO CARPIO

LOS AUTORES

Epifanio Puma Huañec.

Estudios:

- Magister en Matemática.
- Licenciado en Físico Matemáticas.
- Maestría en Matemática Pura, P.U.C.P
- Maestría en Investigación de Operaciones y Sistemas, U.N.M.S.M.
- Doctorado en Educación, Universidad Néstor Cáceres Velásquez.

Experiencia Docente:

- Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco.
- Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Universidad Alas Peruanas.
- Universidad Austral del Cusco.

Isabel Corbacho Carpio.

Estudios:

- Licenciada en Físico Matemáticas.
- Diplomado en estadística, P.U.C.P.
- Maestría en Educción, Universidad Néstor Cáceres Velásquez.

Experiencia Docente:

- Experiencia Docente:
- Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco.
- Universidad San Martin de Porres.

MODELOS FUNCIONALES Y APLICACIONES DIFERENCIALES

Epifanio Puma Huañec
Isabel Corbacho Carpio

Decreto Legislativo .... : 822
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° .... : 2013-06265
International Standard Book Number ISBN .... : 978-9972-813-74-0

Primera edición: Abril 2013
Tiraje: 1000 ejemplares

Impreso en el Perú - Printed in Perú

Para nuestros hijos:

Solin Epifanio

y

Melissa Rocio

PROLOGO

Este libro ha sido escrito basado en las experiencias de la labor docente en las diferentes universidades del país, dirigido principalmente a estudiantes de pre-grado de las facultades de ciencias comerciales y afines, que va servir como material de consulta.

La preocupación de determinar los modelos matemáticos que describen los fenómenos comerciales, es siempre y será el reto de la ciencia, esto con el fin de dar respuesta a muchos problemas que agobian a la sociedad y que sirven de base para el desarrollo económico, en este sentido este libro titulado "Modelos Funcionales y Aplicaciones Diferenciales", pensamos que es la base fundamental para dar inicio con el estudio de la Matemática aplicada.

Se consideran en el presente texto cinco capítulos que son:

Capítulo 1, trata de las funciones reales donde se estudia desde lo que es un par ordenado y luego se define una relación real para luego definir una función real. Se consideran las funciones especiales así como se analizan las funciones trascendentales.

Capítulo 2, trata de las aplicaciones de las funciones a problemas comerciales, se define las funciones costo, ingreso, utilidad se analiza el equilibrio de mercado a si como la ley de la oferta y demanda y los impuesto sobre el punto de equilibrio de mercado.

Capítulo 3, trata del algebra de funciones, se estudia los tipos de funciones y se analiza las funciones inversas.

Capítulo 4, trata de la derivada de funciones reales, las propiedades operacionales de la derivada, derivada de funciones especiales y las derivadas de orden superior.

Capítulo 5, trata de las aplicaciones de la derivada a rectas tangentes, ángulo entre curvas a máximos y mínimos donde se estudia los extremos relativos de una función real, a si como los puntos de inflexión, para terminar en la elasticidad de la demanda y sus aplicaciones a fenómenos comerciales.

El propósito de este libro es ayudar al estudiante a entender, apreciar y analizar la matemática aplicada, para ello se consideran una serie de ejercicios de aplicación propuestos, esto con la finalidad de inquietar al lector de iniciar este reto para lo cual se presentan las definiciones básicas y las proposiciones necesarias que nos permitirá entender el mundo abstracto de la naturaleza.

Los Autores

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

FUNCIONES

1.1. INTRODUCCIÓN.-

1.1.1 PAR ORDENADO.

Sea los elementos a y b, se denomina par ordenado de los elementos denotado por (a, b) al conjunto formado por:

$$(a , b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$$

Donde a, se conoce como el primer componente o primer elemento, y b, como el segundo componente o elemento.

1.1.2 IGUALDAD DE PARES ORDENADOS.

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales sí sus respectivos componentes son iguales.
i.e.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d$$

Ejemplo.
Si se tiene que $(2x + y, 1) = (3,2x - y)$, calcular el valor de x e y.
Para resolver, tenemos por igualdad de pares ordenados que:

$$\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ \underline{2x - y = 1} \\ \quad 4x = 4 \rightarrow x = 1 \end{array}$$

De donde se tiene que $2 + y = 3 \rightarrow y = 1$

$$(x, y) = (1, 1)$$

1.1.3 PRODUCTO CARTESIANO.

Dados dos conjuntos no nulos A y B, el producto cartesiano A x B se define como el conjunto formado por todos los pares ordenados, en donde los primeros elementos son del conjunto A y los segundos elementos son del conjunto B.
i.e.

$$\mathbf{A \times B = \{(a,b)/a \in A \wedge b \in B\}}$$

Ejemplo.
Sean los conjuntos definidos por $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, entonces tenemos

$$AxB = \{(1,a)(1,b),(2,a)(2,b),(3,a)(3,b)\}$$

$$BxA = \{(a,1)(a,2),(a,3)(b,1),(b,2)(b,3)\}$$

Si $A = B = \mathbb{R}$, es el conjunto de los números reales, entonces $A \times B = \mathbb{R}^2$ el cual se denomina *plano cartesiano real.*

Para realizar el diagrama gráfico de un producto cartesiano se puede utilizar el diagrama de árbol, la tabla de doble entrada o en un sistema de ejes coordenados donde el eje horizontal se considera los elementos del conjunto de partida A y en el eje vertical los elementos del conjunto de llegada B, separados en espacios igualmente espaciados.

El producto cartesiano $AxB = \{(1,a)(1,b),(2,a)(2,b),(3,a)(3,b)\}$, podemos representar como un diagrama de árbol, tabla de doble entrada y diagrama cartesiano como:

Diagrama de árbol

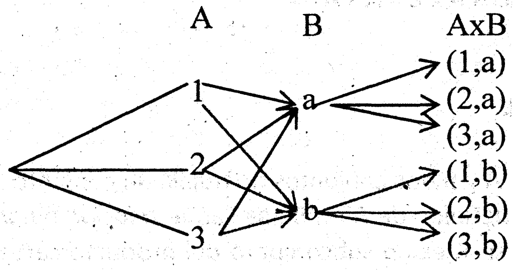
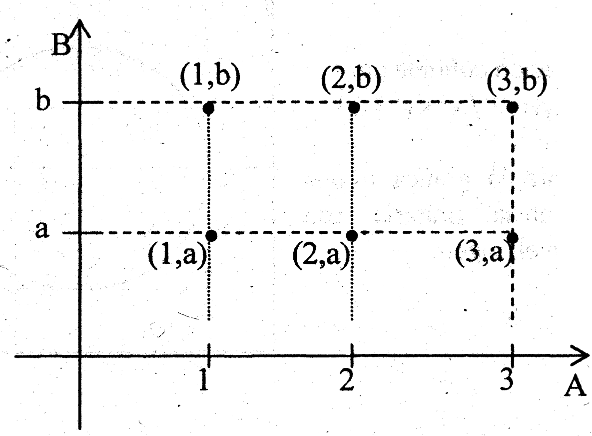


Tabla de doble entrada

A \ B	a	b
1	(1,a)	(1,b)
2	(2,a)	(2,b)
3	(3,a)	(3,b)

Diagrama Cartesiano



Observación.

1.- Si $A = B$ entonces $A \times B = A \times A = A^2$

2.- $A \times B \neq B \times A$

1.1.4 RELACIÓN.

DEFINICIÓN.- Sea A y B dos conjuntos no nulos, un conjunto $\mathfrak{R}$ de pares ordenados definido de A en B , se llama *relación binaria* de A en B , si y solo si R es un subconjunto del producto cartesiano AxB conjuntamente una propiedad $P(x,y) \subseteq AxB$ que caracteriza a la relación.

i.e.

$$\mathfrak{R} \text{ es una Relación de A en B} \Leftrightarrow \mathfrak{R} \subset AxB$$

Ejemplo

Sea los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$

Entonces

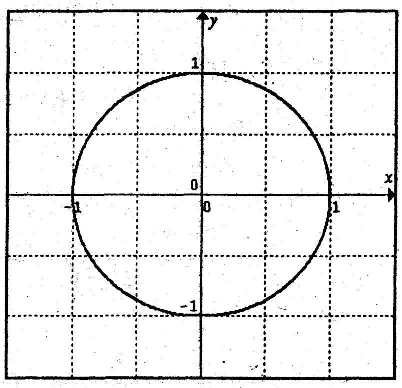
$$\mathfrak{R} = \{(1,b),(2,a)(3,a)\} \text{ es una relación de A en B.}$$

Si la relación $\mathfrak{R}$ está definido de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, la relación se denomina *relación real*.

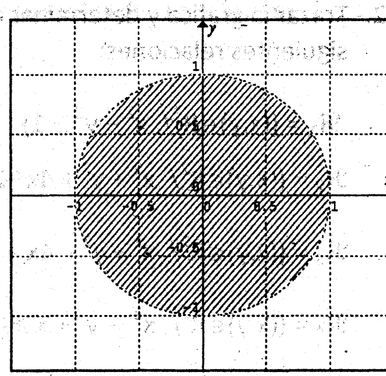
Ejemplo.

1.- La relación definida por $\mathfrak{R}_1 = \{ (x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 = 1 \}$

Representa la grafica a una circunferencia unitaria con centro en el origen.



2.- $\Re_2 = \{ (x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 < 1 \}$ representa el conjunto de puntos del interior de la circunferencia unitaria , los punto de la frontera es decir los puntos que pertenecen a la circunferencia del ejemplo anterior no pertenecen a la relación $\Re_2$



I. EJERCICIOS

Aplicaciones de relaciones definidas en el conjunto de los números reales

1.- Sea los conjuntos definidos por:

$A = \{0,2,3,4,5\}$ y $B = \{-1,0,3,4,5,6\}$.

Determinar todo los elementos de las siguientes relaciones.

$R_1 = \{ (x,y) \in A \times B / \ y = x + 1 \}$

$R_2 = \{ (x,y) \in B \times A / \ x + y = 5 \}$

$R_3 = \{ (x,y) \in A \times B / \ x = y \}$

$R_4 = \{ (x,y) \in A \times A / \ x = y^2 \}$

$R_5 = \{ (x,y) \in B \times B / \ x - y + 2 = 0 \}$

$R_6 = \{ (x,y) \in A \times B / \ y = x^2 \}$

2.- Trazar la grafica y determinar el dominio y rango de las siguientes relaciones:

$\Re_1 = \{(x,y)\in R^2 / \ x^2 - y^2 \geq 1\}$

$\Re_2 = \{(x,y)\in R^2 / \ x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 \leq 0\}$

$\Re_3 = \{(x,y)\in R^2 / \ x^2 + y^2 - 4x + 1 \leq 0\}$

$\Re_4 = \{(x,y)\in R^2 / \ x^2 + y^2 + x \geq 0\}$

$\Re_5 = \{(x,y)\in R^2 / \ y^2 + 12x - 6y + 45 \leq 0\}$

$\Re_6 = \{(x,y)\in R^2 / \ x^2 + 8x + 16y \geq 0\}$

$\Re_7 = \{(x,y)\in R^2 / \ 4x^2 - 12x - 24y - 5 \leq 0\}$

$\Re_8 = \{(x,y)\in R^2 / \ y^2 + 12x - 6y + 45 \geq 0\}$

$\Re_9 = \{(x,y)\in R^2 / 16x^2 + 25y^2 + 64x + 50y - 311 < 0\}$

$\Re_{10} = \{(x,y)\in R^2 / \ x^2 + 4y^2 + 6x - 16y + 9 > 0\}$

$\Re_{11} = \{(x,y)\in R^2 / 25x^2 + 9y^2 - 200x + 90y + 400 < 0\}$

$\Re_{12} = \{(x,y)\in R^2 / \ x^2 - 4y^2 + 6x + 32y - 59 < 0\}$

$\Re_{13} = \{(x,y)\in R^2 / 25x^2 - 144y^2 - 160x - 720y - 4244 > 0\}$

$\Re_{14} = \{(x,y)\in R^2 / \ 9x^2 - y^2 + 18x - 12y - 18 \geq 0\}$

$\Re_{15} = \{(x,y)\in R^2 / \ x^2 - y^2 + 4x + 4y - 5 \leq 0\}$

3.- Graficar la región limitada por las siguientes relaciones:

1.- $\Re_1 : x^2 + y^2 \leq 4 \;;\; x^2 + y^2 \leq 4x$

2.- $\Re_1 : x^2 - 4x \geq y \;;\; y \leq x$

3.- $\Re_1 : y + 1 \geq 0 \;;\; x^2 - 4x \geq y$

$y \leq 3 \;;\; x \geq 0 .$

4.- $\Re_1 : y \geq x^2 \;;\; 2x \geq y$

$2y \leq x^2$

5.- $\Re_1 : x^2 + y^2 \leq 8 \;;\; 2x \geq y^2$

6.- $\Re_1 :$

$$5x + 10y \leq 50$$
$$x + y \geq 10$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

6.- $\Re_1 :$

$$x + y \leq 2$$
$$x + 5y \leq 10$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

7.- $\Re_1 :$

$$x - y \leq 1$$
$$x \leq 2$$
$$x + y \geq 3$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

1.2 FUNCIÓN

1.2.1 DEFINICIÓN. Sea f una relación definida de A en B. f es una función de A en B, sí i sólo sí, para cada elemento del conjunto de partida A, existe a lo más un elemento en el conjunto de llegada B. i.e.

f es una función de A en B denotado por
$f: A \to B / y = f(x)$, si y solo si se cumple que:

i) para algún $x \in A$, $\exists\, y \in B$, tal que $(x,y) \in f$
ii) Si $(x,y) \wedge (x,z) \in f$ entonces $y = z$.

La primera condición se denomina condición de existencia y la segunda condición de unicidad.

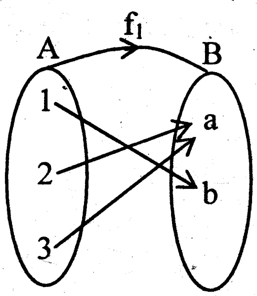
Ejemplo 1

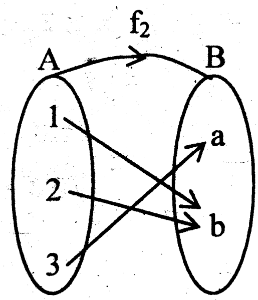
Sea los conjuntos A = {1, 2, 3}, B = {a, b} en donde se definen las siguientes relaciones definidas de A en B:

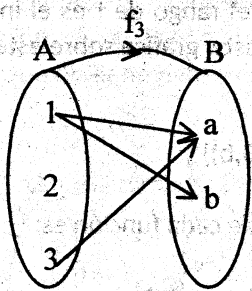
$f_1 = \{(1,b),(2,a)(3,a)\}$ $\qquad$ $f_2 = \{(1,b),(2,b)(3,b)\}$

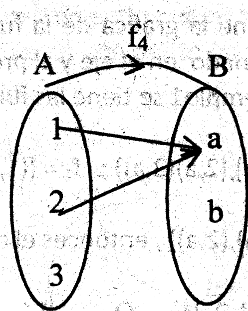
$f_3 = \{(1,a),(1,b)(3,a)\}$ $\qquad$ $f_4 = \{(1,a),(2,a)\}$

De las relaciones definidas anteriormente se pueden representar gráficamente utilizando el diagrama sagital de la siguiente manera









En los diagramas sagitales se observa que las relaciones f_1 , f_2 y f_4 son funciones, en la función f_4 a pesar de que $3 \in A$ no tiene su pareja o imagen tampoco $b \in B$ tiene su pareja o pre imagen, lo que no es requisito para que sea una función, sin embargo f_3 NO es una función debido a que $1 \in A$ tiene dos parejas que son a y $b \in B$, es decir, $(1,a)$ y $(1,b) \in f_3$, entonces $a \neq b$, lo que contradice a que sea $a = b$.

1.2.2 DOMINIO DE UNA FUNCIÓN.

El dominio de la función f, definida de A en B, denotado por Dom(f) ó D_f es el conjunto de todos los primeros componentes de los pares ordenados de la función f.

i.e. $\quad$ $\text{Dom } f = \{x \in A / (x,y) \in f\}$

Si se tiene la grafica de la función f, el dominio de f es el intervalo determinado en el eje **x** al proyecta esta grafica sobre este eje.

1.2.3 RANGO DE UNA FUNCIÓN.

El rango de la función f, definida de A en B, denotado por Rang(f) ó R_f es el conjunto de todos los segundos componentes de los pares ordenado de la función f.

i.e.

$$Rang\,(f) = \{\, y \in B \,/\, (x,y) \in f \,\}$$

Si se tiene la grafica de la función f, el rango de f es el intervalo determinado en el eje y al proyectar esta grafica sobre este eje. En el ejemplo1 se tiene las funciones:

$f_1 = \{(1,b),(2,a)(3,a)\}$; $f_2 = \{(1,b),(2,b)(3,b)\}$ y

$f_4 = \{(1,a),(2,a)\}$, entonces el dominio de cada función es:

$$D_{f_1} = \{1,2,3\} \;,\; D_{f_2} = \{1,2,3\} \;\text{ y }\; D_{f_4} = \{1,2\}$$

y el rango es:

$$R_{f_1} = \{a,b\} \;,\; R_{f_2} = \{a,b\} \;\text{ y }\; R_{f_4} = \{a\}$$

OBSERVACIONES:

1) Si f está definido de A en A, entonces se dice que f está definida en A.

2) Si A=R, entonces f es una función real cuya notación funcional esta dado por :
$f: R \rightarrow R / y = f(x)$

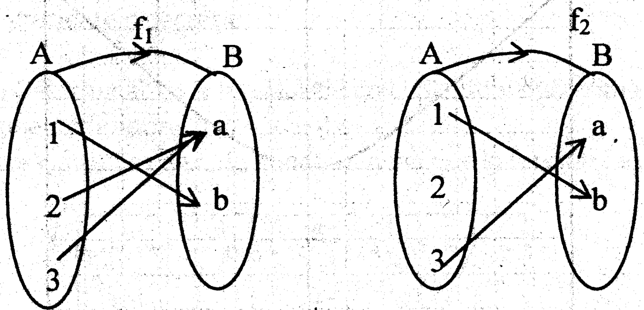
3) Si y = f(x) es una función, entonces x se denomina variables independiente, y es la variable dependiente y se lee, y igual a f de x.

4) *$f: A \rightarrow B / y = f(x)$, es una aplicación si y solo si se cumple que* :
i) $\forall$ $x \in A$, $\exists$ $y \in B$, tal que $(x,y) \in f$
ii) Si $(x,y) \wedge (x,z) \in f$ entonces $y = z$.

Si $D_f = A$, entonces f ***es una aplicación***.

"Una aplicación es una función pero no toda aplicación es función".

En el ejemplo f_1 y f_2 son funciones mientras que f_1 es una aplicación y f_2 no es una aplicación puesto que existe un elemento $2 \in A$ que no tiene pareja o imagen en B.



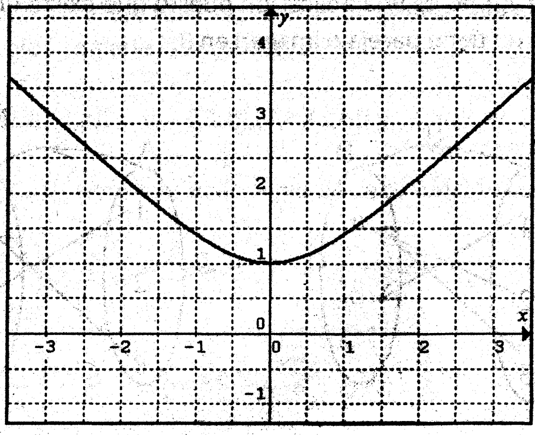
5) Para determinar el dominio de una función real $f : R \to R / y = f(x)$ se analiza la variación de x, mientras para el rango de f primeramente se despeja x en función de y ($y = g(y)$) y a partir de ello de determina la variación de la variable y

Ejemplo

Determinar el dominio y rango de la función
$y = \sqrt{x^2 + 1}$

Como en la función ya está despejada la variable y entonces la variación de la variable x es $x^2 + 1 \geq 0$ de donde se determina que el conjunto solución es todo R.

De la grafica de la función f mostrada



Se tiene que el $Dom(f) = \mathbb{R}$

GRAFO DE UNA FUNCIÓN

Definición.- El grafo de la función f es el conjunto de todos los puntos (x,y) que pertenecen a la función f.

Propiedad (Propiedad fundamental de las funciones reales)
Una recta vertical intercepta la grafica de una función a lo más en un punto.

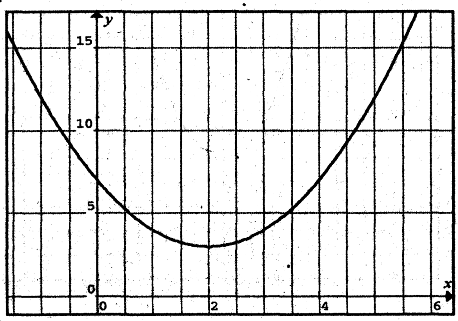
1.2.4 FUNCIONES MONÓTONAS

Definición.-

1. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = f(x)$ es no decreciente si dado un $x_o, x_1 \in D_f$ y $x_o < x_1$ entonces $f(x_o) \leq f(x_1)$.
2. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = f(x)$ es no creciente si dado un $x_o, x_1 \in D_f$ y $x_o < x_1$ entonces $f(x_o) \geq f(x_1)$.
3. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = f(x)$ es estrictamente creciente o simplemente creciente si dado un $x_o, x_1 \in D_f$ y $x_o < x_1$ entonces $f(x_o) < f(x_1)$.

4. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, y = f(x)$ es estrictamente decreciente o simplemente decreciente si dado un $x_o, x_1 \varepsilon D_f$ y $x_o < x_1$ entonces $f(x_o) > f(x_1)$.
5. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, y = f(x)$ es monótona si es creciente o decreciente

Ejemplo Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la siguiente función $f(x) = x^2 - 4x + 7$.
La figura es la grafica de f, de donde se tiene que la función f es:



Creciente para $x \in [2, +\infty[$ y es decreciente en $x \in]-\infty, 2]$

1.2.4 FUNCIÓN PAR E IMPAR

Definición.-

1. Una función $f : R \rightarrow R / y = f(x)$ se dice que es PAR si para todo x y -x del dominio de f se cumple que $f(x) = f(-x)$.

   La grafica de toda función par es simétrica con respecto al efe y.

2. Una función $f : R \rightarrow R / y = f(x)$ se dice que es IMPAR si para todo x y -x del dominio de f se cumple que $f(-x) = -f(x)$.
   La grafica de toda función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

Ejemplo

Determinar cuáles de las siguientes funciones son pares o ímpares

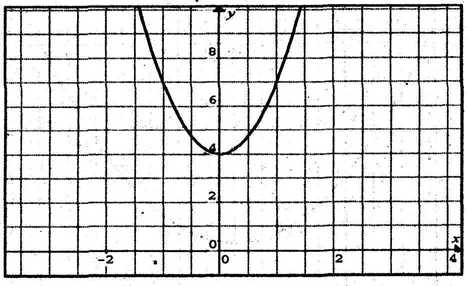
i) $f(x) = 3x^2 + 4$

ii) $f(x) = x^3 - 3$

iii) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

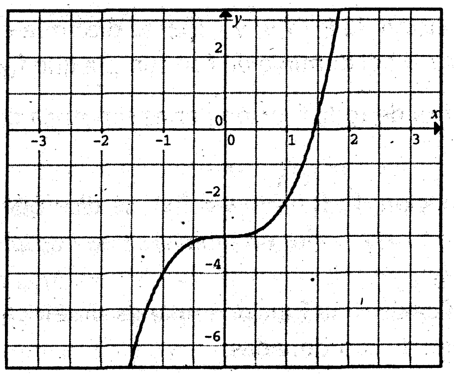
Solución:

i) La función $f(x) = 3x^2 + 4$ es par puesto que $f(x) = f(-x) = 3x^2 + 4$



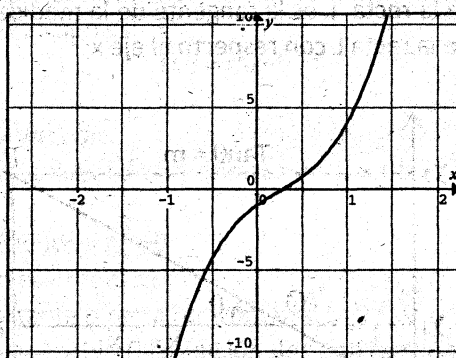
En la figura se observa que la gráfica de la función es simétrica con respecto al eje y.

ii) La función $f(x) = x^3 - 3$ no es una función par tampoco es impar debido a que $f(-x) = -x^3 - 3$, de donde $f(-x) \neq -f(x)$



En la figura se observa que la grafica no es simétrica con respecto al origen ni al eje y por lo tanto f no es función par ni tampoco es una función impar.

iii) La función $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
no es una función par tampoco es impar debido a que
$f(-x) = -4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, de donde $f(-x) \neq -f(x)$



En la figura se observa que la grafica no es simétrica con respecto al origen ni al eje y por lo tanto f no es función par ni tampoco es una función impar.

1.3 ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES

1.3.1 FUNCIÓN LINEAL.- Una función lineal definida en R es una función que cambia a una tasa constante con respecto a su variable independiente.
La gráfica de una función lineal es una línea recta, cuya ecuación se expresa de la siguiente forma:

$$y = mx + b$$

donde m, se denomina pendiente, y b es la ordenada en el origen.
i.e.

$$f : R \to R / y = mx + b$$

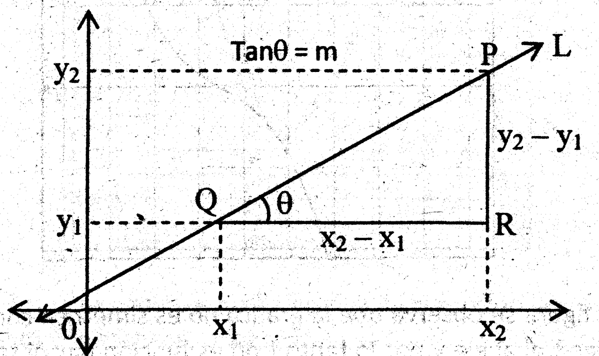
1.3.1.1 PENDIENTE DE UNA RECTA.

La pendiente de la una recta L no vertical denotado por m, que pasa a través de los puntos $P(x_2,y_2)$ y $Q(x_1,y_1)$, está definido por la relación :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En la figura se observa que el triangulo PRQ es recto en R y la pendiente de la recta L es la tangente de la medida del ángulo de inclinación de la recta L con respecto al eje x

i.e.



De la figura tenemos que $Tan\theta = \frac{PR}{QR}$, de donde se tiene que

$$Tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

1.3.1.2 ECUACIONES DE UNA RECTA

Las ecuaciones de una recta toman las siguientes formas:

1. **Ecuación vectorial.** Sea P_o un punto de la recta L y $\vec{a}$ el vector direccional, la ecuación vectorial de la recta L está definido por:

$$L: P = P_o + t\vec{a}, \ t \in R$$

2. **Ecuación de forma Punto Pendiente.**- Sea $P_o = (x_o, y_o)$ un punto de la recta L y **m** su pendiente, la ecuación de forma Punto Pendiente, está definido por:

$$L: y - y_o = m(x - x_o)$$

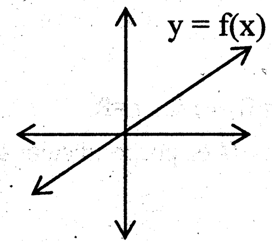
3. **Ecuación de forma Pendiente Ordenado.**- Sea **m** la pendiente de la recta L y **b** la ordenada en el origen, la ecuación de forma Pendiente ordenado, está definido por cuya ecuación es:

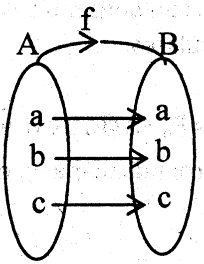
$$L: y = mx+b$$

OBSERVACIÓN.

1. Una función lineal de ecuación **L:** $y = mx + b$ es :

i) Creciente si $m > 0$
ii) Decreciente si $m < 0$
iii) Constante o recta horizontal, si $b=0$
iv) Sí $a = 1$ y $b = 0$ la función f es una función denominado función identidad
i.e $f: R \to R / \ y = x$ es una función identidad





4.- **Ecuación general de la recta.**-la ecuación general de la recta tiene la forma

$$\mathbf{L}: Ax + By + C = 0, \text{ donde } A, B \text{ y } C \in R$$

El vector direccional de la recta L es $\vec{a}$ = **(B,-A)** y la pendiente m es

$$m = -\frac{A}{B}, \ B \neq 0$$

1.3.1.3 RECTAS PARALELAS

Dos rectas son paralelas si sus vectores direccionales son también paralelos.

i.e.

Sea $L_1: P = P_o + t\vec{a}$, $t \in R$ y $L_1: P = Q_o + r\vec{b}$, $r \in R$.

Si L_1 es paralelo a L_2, entonces $\vec{a}$ es paralelo a $\vec{b}$

Teorema

1.- Sea la ecuación de las rectas $L_1: y = m_1x+b$ y $L_2: y = m_2x + b$

L_1 es paralela a L_2 si solo sí $m_1=m_2$.

2.- Sea la ecuación de las rectas

$L_1: P = P_o + t\vec{a}$, $t\in R$ y $L_1: P = Q_o + r\vec{b}$, $r \in R$.

L_1 es paralelo a L_2 si y solo sí $\vec{a} = k\vec{b}$, $k \in R$

3.- Sean las ecuaciones de las rectas

$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

L_1 es paralelo a L_2 si y solo si $A_1B_2 = A_2B_1$

1.3.1.4 RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas son perpendiculares si sus vectores direccionales son perpendiculares.

i.e.

Sea $L_1: P = P_o + t\vec{a}$, $t\in R$ y $L_1: P = Q_o + r\vec{b}$, $r\in R$.

Si L_1 es perpendicular a L_2, entonces $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$

Teorema

1.- L_1: $y = m_1x+b$ y L_2: $y = m_2x+b$

L_1 es perpendicular a L_2 si solo sí $m_1 = m_2$.

2.- $L_1: P = P_o + t\vec{a}$, $t\in R$ y $L_1: P = Q_o + r\vec{b}$, $r\in R$. son perpendiculares si y solo si $\vec{a} . \vec{b} = 1$

3.- Sean las ecuaciones de las rectas

$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

L_1 es perpendicular a L_2 si y solo si $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

1.3.1.5 RECTAS COINCIDENTES

Dos rectas son congruentes sin tienen el mismo dominio y sus gráficas correspondientes coinciden.

Teorema

Sea la ecuación de las rectas L_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y
L_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

L_2 es congruente a L_2 si y solo si. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

1.3.2. FUNCIÓN CUADRÁTICA.

Una función $f : R \rightarrow R/\ y = f(x)$ es una función cuadrática, si **$f(x) = ax^2 + bx + c$,** donde a, b, y c son constantes reales con $c \neq 0$.

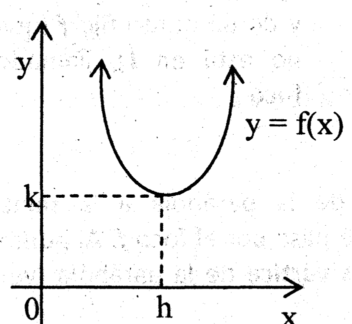
La función f siempre es reducible a la forma

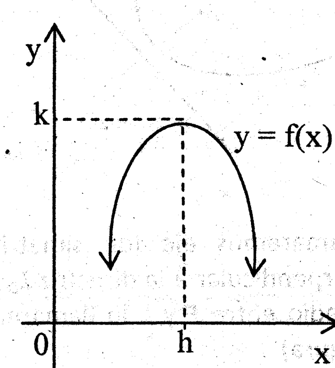
$$\mathbf{f(x) = a\,(x-h)^2 + k.}$$

donde el punto (h,k) es el vértice de la grafica de la función f(x) que presenta a una parábola.

La grafica de f es :

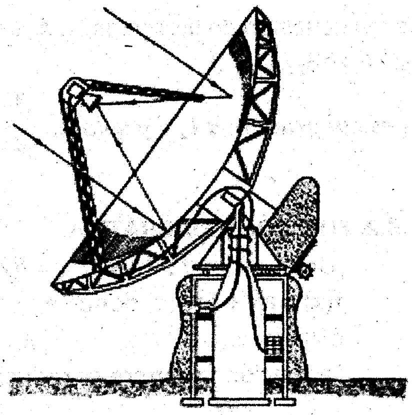
i) para $a > 0$ ii) para $a < 0$

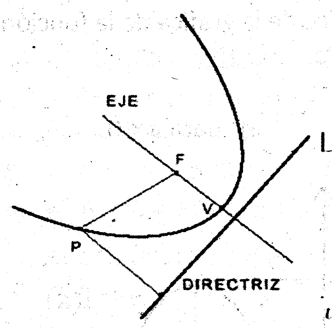




El dominio de la función f es R para ambos casos y el rango de la función f es para el caso i) $[k,\infty[$ y para el caso ii) $]\infty, k]$

PARÁBOLA





Una parábola

DEFINICIÓN

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos ***P*** del plano que equidistan de una recta fija L_D, llamada **directriz** , y de un punto fijo ***f*** (que no está en ***L***), llamado **foco** .

Llamaremos **eje** (de simetría) de la parábola a la recta perpendicular a la directriz L_D que pasa por el foco ***f***. Al punto medio entre ***F*** y ***L*** lo llamaremos **vértice** de la parábola (ver Figura).

1.3.2.1 ECUACIÓN CARTESIANA DE LA PARÁBOLA

CASO 1

A continuación encontraremos analíticamente la ecuación de la parábola que tiene como foco al punto ***F (0; p)*** y como directriz a la recta de ecuación ***y = -p***. Es fácil ver que esta parábola tiene como vértice al origen y como eje de simetría al eje ***Y***. Además, según la definición, ***P(x; y)*** es un punto de la parábola si y sólo si ***d(P; F) = d(P; L)***.

Es decir:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando:

$$x^2 + (y + p)^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$

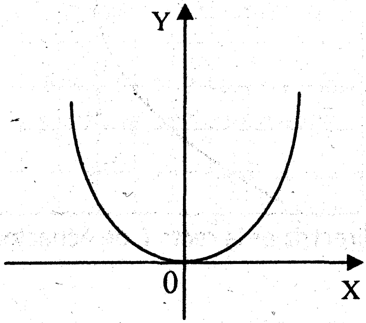
$$x^2 - 2yp = 2yp$$

Nos queda: $\mathbf{x^2 = 4yp}$

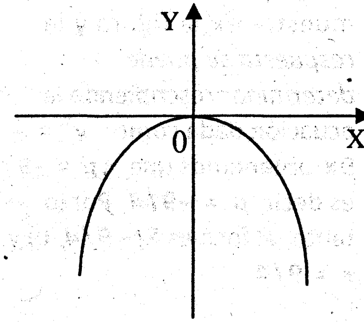
La ecuación $\mathbf{x^2 = 4yp}$ se denomina ***forma canónica*** de la ecuación de una parábola que tiene como directriz a la recta horizontal ***L***, de ecuación **y = - p**; como foco **F (0; p)** , y un punto está sobre esta parábola, si y sólo si cumple con esta ecuación.

GRAFICA:

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba



Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo



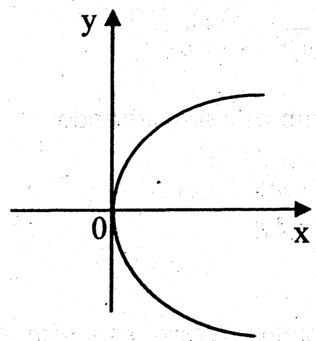
CASO 2

De manera similar podemos ver que la forma canónica de la ecuación de una parábola que tiene como directriz a la recta vertical L de ecuación **x = - p** y como foco F(p; 0) es

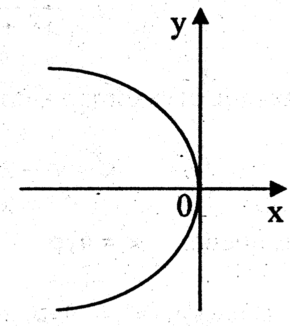
$$y^2 = 4xp$$

GRAFICA:

Si p > 0, la parábola se abre hacia la derecha

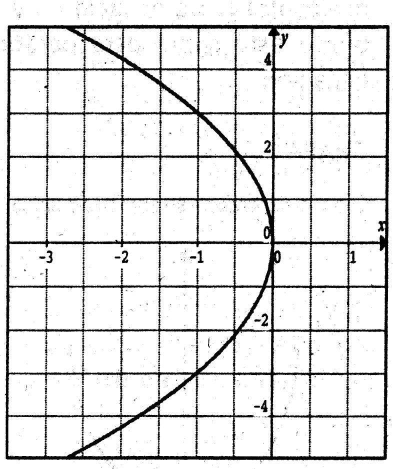


Si p < 0, la parábola se abre hacia izquierda.



EJEMPLOS

1. Encuentre el foco y la directriz de la parábola de ecuación: $x = -\frac{1}{9}y^2$

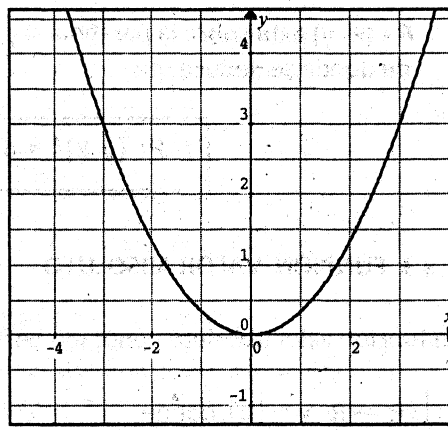


La Parábola $\mathbf{y^2 = -9x}$, tiene como grafica como se muestra en la figura y la *respuesta.se puede determinar* rescribiendo la ecuación dada como $\mathbf{y^2 = -9x}$ obtenemos que $\mathbf{4p = -9}$ es decir, $\boldsymbol{p = -9/4}$. Por lo tanto, el foco es $\boldsymbol{F(-9/4, 0)}$ y la directriz es la recta $\boldsymbol{L}$ de ecuación $\mathbf{x = 9/4}$.

2. Determine la ecuación de la parábola con vértice (0, 0), que tiene al eje **Y** como eje de simetría y que pasa por el punto P(–3, 3).

Solución.
Según las condiciones dadas, la ecuación de la parábola es de la forma $x^2 = 4py$. Como P(–3,3) está sobre la parábola, $(-3)^2 = 12p$, es decir que $p = 9/12 = 3/4$. Por lo tanto, la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 3y.$$



CASO 3

Ahora buscaremos la forma cartesiana de la ecuación de una parábola con vértice ***V(h, k)*** y directriz paralela a uno de los ejes coordenados.

- **Si la directriz es paralela al eje *X*** y el vértice de la parábola es ***V = (h, k)***, el eje de simetría es la recta vertical ***x = h***. Supongamos que el foco es el punto ***F(h, k + p}***, entonces la directriz *L* de la parábola es la recta horizontal ***y = k – p***.

  P=*(x, y)** está sobre la parábola si y sólo si, ***d(P, F) = d(P, L), de donde se deduce que:

$$\boxed{P: (x-h)^2 = 4p\,(y-k)}$$

- **Si la directriz es paralela al eje Y** y el vértice de la parábola es **V = (h, k)**, el eje de simetría es la recta vertical ***y = k.*** Supongamos que el foco es el punto ***F(h+p, k),*** entonces la directriz ***L*** de la parábola es la recta horizontal ***x = h − p.***

P **=(x, y)** está sobre la parábola si y sólo si, ***d(P, F) = d(P, L),*** de donde se deduce que:

$$\boxed{P: (y-k)^2 = 4p(x-h)}$$

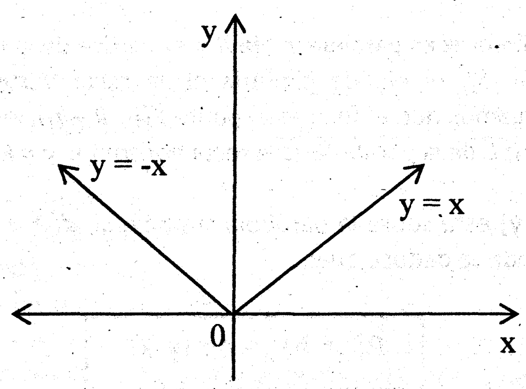
1.3.3. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO.-

La función valor absoluto denotado por $|\ |$ esta definido por

$|\ | : R \to R /\ y = |x|$ donde

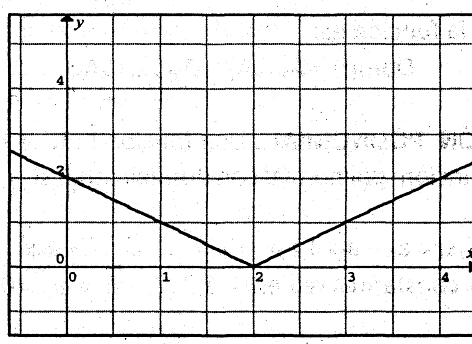
$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

El dominio y rango de la función es todo R cuya grafica es:

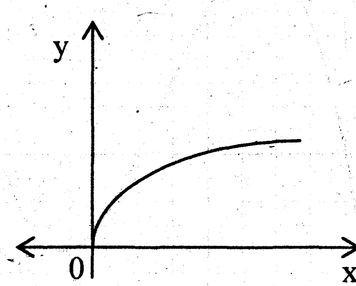


Ejemplo.

La graficar la función $f(x) = |x - 2|$, es:



1.3.4 . FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA. Una función $f : R \rightarrow R / \ y = f(x)$ es una función cuadrática, si $f(x)= \sqrt{x}$ con $x \geq 0$ la grafica de f es:



1.3.5. FUNCIÓN SECCIONADA. Una función $f : R \rightarrow R / \ y = f(x)$ es una función seccionada si:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & sí \quad x \in A_1 \\ f_2(x) & sí \quad x \in A_2 \\ f_3(x) & sí \quad x \in A_3 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ f_n(x) & sí \quad x \in A_n \end{cases}$$

Donde $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n = \phi$ y $f_i(x)$ son funciones para $x \in A_n$, $i = 1,2,3,\ldots n$

El dominio de la función es:

$$Dom(f) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

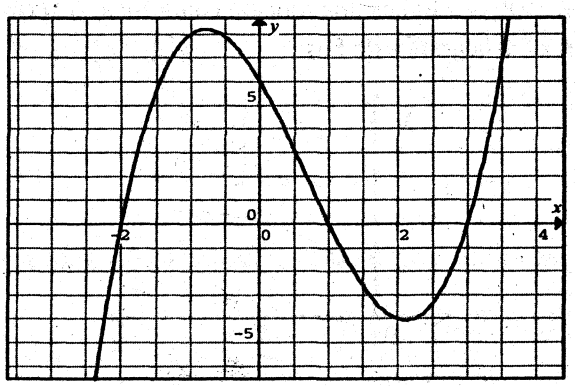
1.3.6 . FUNCIÓN POLINOMIAL . Una función $f : R \to R /\ y = f(x)$ es una función polinomial con dominio en R si

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots\ldots + a_nx^n$$

con a_i constantes reales $i = 1,2,3,\ldots n$ y $a_n \neq 0$

Ejemplo.

La grafica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ es:



1.3.7. FUNCIÓN RACIONAL . Una función $f : R \to R /\ y = f(x)$ es una función una función racional si

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Donde , p(x) y q(x) son polinomios de la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

y

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_mx^m$$

con $q(x) \neq 0$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$

II. EJERCICIOS

i. Graficar las funciones definidas a continuación y determinar su Dominio y Rango.

1. $f(x) = 4 - 2x, \; -1 \leq x \leq 3$

2. $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$

3. $f(x) = |3 - x| - 2$

4. $f(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$

5. $f(x) = 1 - \frac{3}{4}\sqrt{25 + (x-2)^2}$

6. $f(x) = x^2 + 4x + 7$

7. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x + 1}$

8. $f(x) = (x + 2)^2 - 3$

9. $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 3}$

10. $f(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$

11. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x<3 \\ 2x - 1, & x \geq 3 \end{cases}$

12. $$f(x) = \begin{cases} 5 & , x = 2 \\ \dfrac{x}{2} + 1 & , x \neq 2 \end{cases}$$

13. $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , -2 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & , 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

14 $$f(x) = \begin{cases} 5 + 2x & , x > -3 \\ x^2 - 14 & , x \leq -3 \end{cases}$$

15 $$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & , x \leq 1 \\ 2 + x^2 & , x > 1 \end{cases}$$

16. $$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , x > 5 \\ 6 - 3x & , x < 5 \end{cases}$$

17.- $$f(x) = \begin{cases} x - 3 & , x < 3 \\ 2x + 1 & , x > 3 \end{cases}$$

18. $$f(x) = \begin{cases} 4x + 3, & -2 \le x < 0 \\ 1 + x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 7, & x > 2 \end{cases}$$

19. $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le -1 \\ 2x + 5, & -1 < x \le 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

20. $$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & |x| \le 2 \\ x + 1, & 2 < x < 4 \end{cases}$$

21 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

22 f(x) = $|x^2 - 2x|$

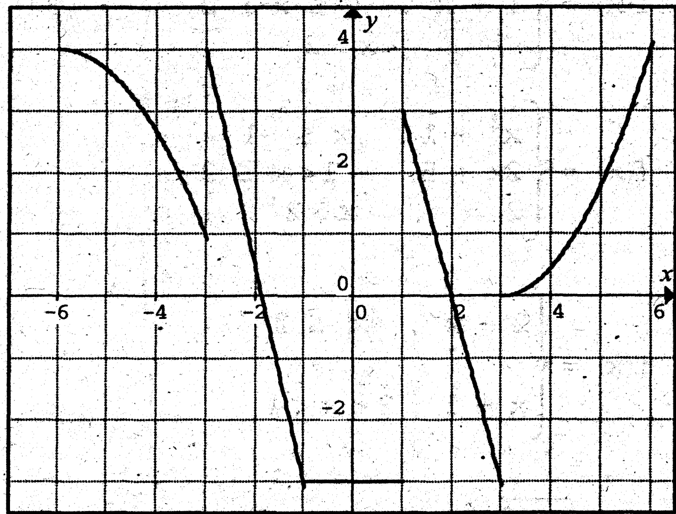
23 $$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{1/3}, & < -3 \\ 2, & -3 < x < 3 \\ x+2, & x>3 \end{cases}$$

24.- Sea la función $g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & ,sí \quad x \le 0 \\ 2x + 1 & ,sí \quad x > 0 \end{cases}$

a) Trace la gráfica de g
b) Evalué : g(0) , g(-2) y g(1)
c) Hallar el rango de g
d) Calcular

$$E = \frac{2g(1) - 3g(-1)}{\frac{1}{2}g(\frac{1}{2}) + 4g(2)}$$

25.- Según el grafico de la función g.



Responder las siguientes preguntas dadas.

a) hallar el dominio y rango de g

b) si es posible, encontrar los siguientes valores.

i) g(-1) ii) g(1) iii) g(6) iv) g(-3) v) g(3)

c) ¿Cuál es el máximo valor de g? ¿Para qué valores de x ocurre el máximo valor?

d) ¿ Cuál es el mínimo valor de g? ¿Para qué valores de x ocurre el mínimo valor?

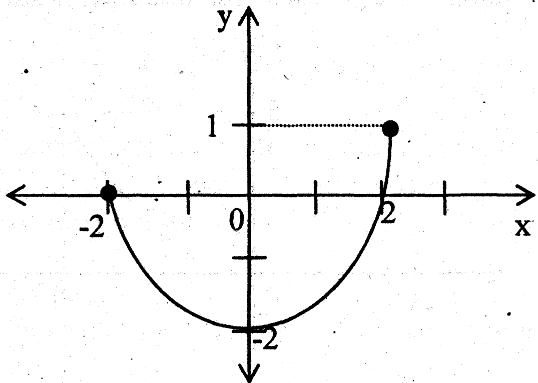
e) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento

f) ¿En qué intervalo la función no crece ni decrece?

g) Determine la regla de correspondencia de g para el intervalo donde g es lineal.

h) Determine la regla de correspondencia para g en el intervalo [–6,-3[y [3,5[donde g es una función cuadrática con vértices en (-6,4)y (3,0) respectivamente.

26.-Se tiene la grafica de la función y = f(x)



Por cada uno de las siguientes funciones abajo, trazar la grafica que corresponda a la transformacion correcta de f.

A) $y = 2f(x)$
B) $y = f(x + 3)$
C) $y = - f(x)$
D) $y = f(x) + 3$
E) $y = - f(x) + 3$
F) $y = f(x - 3)$

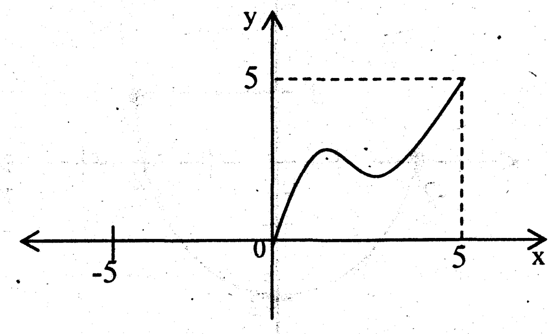
II. FUNCIONES PAR, IMPAR Y FUNCIONES INYECTIVA SURYECTIVA Y BIYECTIVA

1.- a) Si el punto (5,3) está en la grafica de una función par, ¿cuál otro punto debe estar sobre la gráfica?

b) Si el punto (5,3) está en la grafica de una función impar, ¿cuál otro punto debe estar sobre la gráfica?

2.- Una función f tiene su dominio en [-5,5] y se muestra una parte de la grafica.

a) Complete la grafica de f si se sabe que está es par.
b) Complete la grafica de f si se sabe que está es impar.



3.- Determinar si f es par, impar o ninguna de las dos cosas . Si f es par o impar, aplique la simetría para trazar su grafico.

a) $f(x) = x^{-1}$
b) $f(x) = x^2 + x$
c) $f(x) = x^3 - x$
d) $f(x) = x^{-3}$
e) $f(x) = x^4 - 4x^2$
f) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$
g) $f(x) = x^3 + 1$

4.- Definir una función f de modo que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

- Dom(f) = R
- $f(x) = x^2 - 4x + 7$ para $x \in [0, +\infty[$
- f es impar

5.- Sea f una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & si \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

a) Graficar la función g con dominio$]-2,0[\cup]0,2[$, que sea impar y que coincida con f en el intervalo $]0,2[$.
b) Dar la regla de correspondencia para dicha función g.

7.- Sea f y g dos funciones cuyas reglas de correspondencia están dadas por :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad -3<x<0 \\ 1-x & si \quad 0\le x<2 \end{cases} \quad , \quad g(x) = 1-x^2 \ , \ -2\le x\le 3$$

¿Es $\dfrac{f}{g}$ una función creciente en todo su dominio?

Justificar su respuesta.

III . LÍNEA RECTA

1. Hallar la pendiente de cada una de las rectas que pasan por los puntos.

a) $A(3,-4)$ y $B(5,2)$

b) $C(1/2,2)$ y $D(6,2)$

c) $G(1,2)$ y $H(-2,2)$

2. Escriba la ecuación para la recta que posee las propiedades dadas:

a) Pasa por (2,0) y la pendiente es 1.

b) Pasa por (5,-2) y la pendiente es $-\dfrac{1}{2}$

c) Pasa por (2,5) y es paralela al eje x .

d) Pasa por (1,0) y (0,1)

e) Pasa por $\left(-\frac{1}{5},1\right)$ y $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{4}\right)$

f) Pasa por (-1,3) y perpendicular a la recta L:x-2y=2

g) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $\left(3,\frac{1}{2}\right)$ y es perpendicular a la recta pasa por los puntos (98,3) y (98,-10).

3. Hallar la ecuación de la recta indicada y dibujar su gráfica.

a) Pasa por A (2,1) y B(0, −3)

b) Pasa por E (0 , 3) con $m = \frac{3}{4}$

c) Ordenada en el origen 2 con $m = 4$

d) Pasa por F (0,5) con $m = -2$

4. Demostrar que la recta que pasa por los puntos A(⍰2,5) y $B(4,1)$ es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $C(-1, 1)$ y $D(3,7)$.

5. Una recta L_1, pasa por los puntos $A(3,2)$ y B(⍰4,6) y otra recta L_2 pasa por los puntos C(⍰7,1) y D(x,⍰6). Hallar la abscisa x, sabiendo que la recta L_1 es perpendicular a la recta L_2.

6. En el triángulo cuyos vértices son $A(-2\ ,1)$, $B(4,7)$ y $C(6,-3)$. Determinar:

   a) Las ecuaciones de sus lados.

   b) La ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralelo al lado opuesto $\overline{BC}$.

7. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,1)$ y sea:

   a) paralela y b) perpendicular, a la recta $4x - 2y = 3$

8. Dada el triángulo cuyos vértices son $A(-5,6)$ y $B(-1,-4)$ y $C(3,2)$. Encontrar las ecuaciones de las medianas y su punto de intersección.

9 Encontrar la ecuación de la línea recta cuya pendiente es ⍰2 y pasa por el punto de intersección de rectas dadas por las ecuaciones: $2x + y = 8$ y $3x - 2y = -9$.

10 Hallar la ecuación de la recta cuya distancia al origen del sistema es 5 y pasa por el punto de coordenadas $A(1,7)$. (Dos soluciones).

11 Calcular la distancia de la línea recta cuya ecuación es $8x + 15y - 24 = 0$, al punto $A(-2,-3)$.

12 Hallar la distancia comprendida entre las rectas paralelas:

$$3x - 4y + 8 = 0 \quad \text{y} \quad 3x - 4y + 9 = 0$$

13 La distancia de la línea recta representada por la ecuación $4x - 3y + 1 = 0$, al punto P es 4, si la ordenada de P es 3. Calcular el valor de la abscisa de P.

14 ¿Cuál de los siguientes pares de rectas son perpendiculares?
a) $x = 1$, $y = -1$
b) $x + y = 1$, $2y - 3x = 4$
c) $x + y = 1$, $1 + y = x$

15 Bosquejar el gráfico de $|x^2 + xy| = 0$

IV PARÁBOLA

1.-Determinar la medida del ángulo que forman entre sí las tangentes trazadas a la parábola P: $x^2 = 8y$, trazadas desde el punto P(-2 ,-4).

2.-Calcular el valor de n para que la recta L: $4x - y + n = 0$, sea tangente a l parábola P: $y^2 = 8x$,

3.-Hallar las ecuaciones de las tangentes a la parábola P: $y^2 = 4x$, que sean paralelas y perpendiculares a la recta L: $y = x$.

4.-Hallar el radio de la circunferencia cuyo centro es el punto $P = (4p, 0)$ para que sea tangente a la parábola P: $y^2 = 4px$.

5.-determinar la ecuación de la parábola que tiene como eje la recta L_E: $4x - 3y + 9 = 0$, sabiendo que su vértice es el punto $V = (3, 7)$ de esta recta, y que pasa por el punto $P = (5, 11)$. Obtenida la ecuación determinar las coordenadas del foco y expresar la ecuación de la parábola en su forma más simple utilizando transformación de coordenadas.

6.-El punto medio de una cuerda de la parábola P: $x^2 = 16y$ es $M = (3, 6)$. Determinar la ecuación de la recta que contiene a la cuerda.

7.-Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice esta en el origen de coordenadas, eje es la recta L: $y = x$ la medida del lado recto es $18^{1/2}$.

8.-Dado el foco $f = (5, 1)$ y el vértice $V = (1, -2)$ de la parábola. Hallar la ecuación de la parábola.

9.-Dados los puntos $L = (-1, 8)$ y $R = (3, -4)$ extremos del lado recto. Hallar la ecuación de la parábola.

10.-La directriz de una parábola es la recta L: $x + 5 = 0$, y su vértice es el punto $V = (0, 3)$. Hallar la ecuación de la parábola.

11.- La directriz de una parábola es la recta L: $y - 1 = 0$, y su foco es el punto $f = (4, -3)$. Hallar la ecuación de la parábola.

12.-Hallar la ecuación de la tangente y normal a la parábola P: $y^2 + 2y - 4x - 7 = 0$,en el punto de contacto $T = (7, 5)$

13.-El eje de simetría de una parábola es la recta L_E: $2x - 3y - 4 = 0$, su foco es el punto $f = (11, 6)$ siendo su vértice $V = (14, 8)$. Hallar la ecuación de la parábola.

14.-Dado el foco $f = (0, 0)$ y directriz la recta L_D: $x + y + 4 = 0$. Hallar la ecuación y los elementos de la parábola.

15.-Hallar la ecuación de la directriz y las coordenadas del foco de la parábola cuyo eje es la recta L_E: $4x - 3y = 0$, con vértice en $V = (3, 4)$ sabiendo que pasa por el punto $P = (2, 11)$.

16.-El foco de una parábola es el punto $f = (4\,,1)$ y la ecuación de la directriz es L_D: $x + y - 17 = 0$. Hallar el vértice y la ecuación de la parábola.

17.- Dado el foco $f = (7,5)$ y el vértice $V = (3,2)$ de la parábola. Hallar las ecuaciones de la recta directriz y de la parábola.

18.-Determinar la ecuación de la parábola que tiene como eje la recta L_E: $4x - 3y + 9 = 0$, sabiendo que su vértice es el punto $V = (3\,,7)$ de esta recta, y que pasa por el punto $P = (5\,,11)$.

19.-Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del vértice y la longitud del lado recto, si las coordenadas del foco es el punto $f = (0\,,0)$, directriz la recta L_D: $x + y + 4 = 0$.

20.-Dados los puntos $L = (-1\,,8)$ y $R = (3\,,-4)$ extremos del lado recto obtener la ecuación de la parábola.

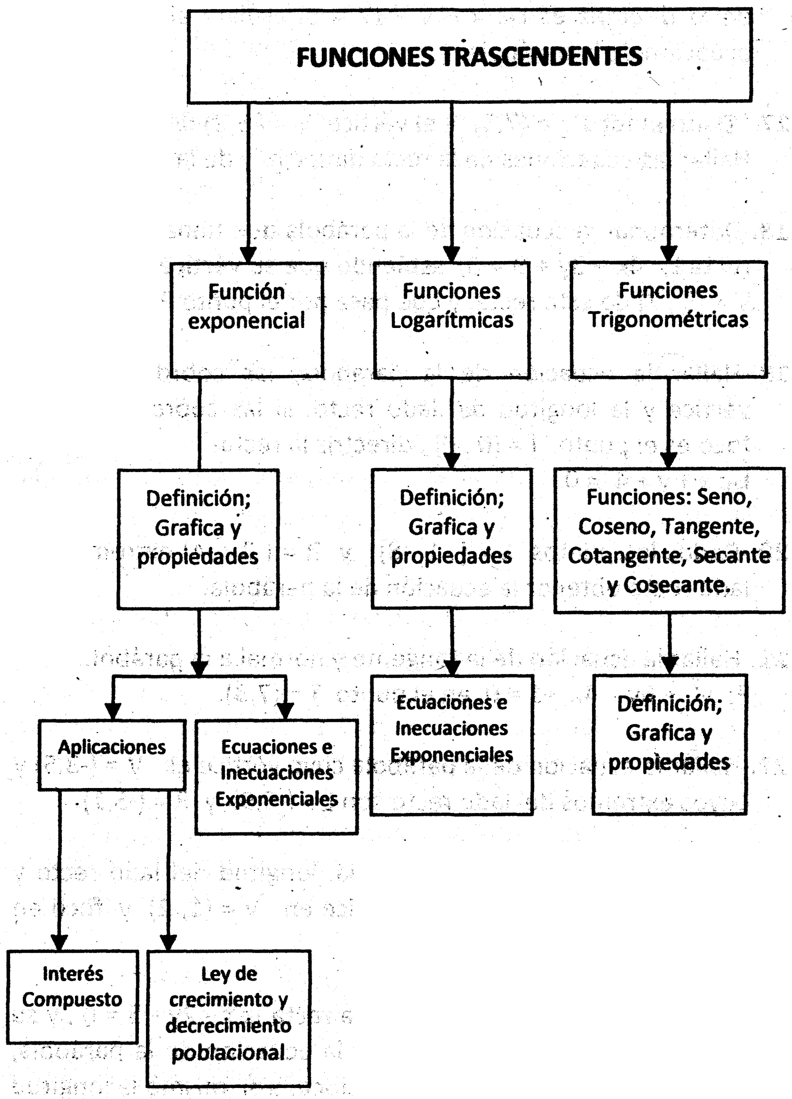
21.-Hallar la ecuación de la tangente y normal a la parábola P: $y^2 + 6y - 4x + 1 = 0$, en el punto $T = (7,3)$.

22.-Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es $V = (-3,5)$ y cuyos extremos del lado recto son $L = (-5,9)$ y $R = (-5,1)$.

23.-Hallar la ecuación de la parábola, longitud del lado recto y ecuación de la directriz con vértice en $V = (1,-2)$ y foco en $F = (-1,2)$.

24.-La directriz de una parábola es la recta L: $x - 2y - 5 = 0$, y su foco es el punto $f = (0,0)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del vértice y del foco, a si mismo la longitud del lado recto y las coordenadas de sus extremos.

25.-Si el vértice de una parábola es el origen de coordenadas y el foco es el punto $F = (1,1)$. Hallar la ecuación de la parábola.


FUNCIONES TRASCENDENTES
Función exponencial
Funciones Logarítmicas
Funciones Trigonométricas
Definición; Grafica y propiedades
Definición; Grafica y propiedades
Funciones: Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante.
Aplicaciones
Ecuaciones e Inecuaciones Exponenciales
Ecuaciones e Inecuaciones Exponenciales
Definición; Grafica y propiedades
Interés Compuesto
Ley de crecimiento y decrecimiento poblacional

1.4. Función Exponencial.

Definición.- Sea $b \in R^+ - \{1\}$, la función exponencial en base b denotado por ***Exp_b*** está definido por:

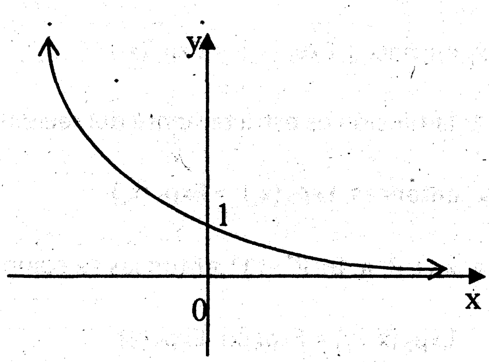
$Exp_b : R \to R^+ / \ y = Exp_b(x)$

donde $Exp_b(x) = b^x$,

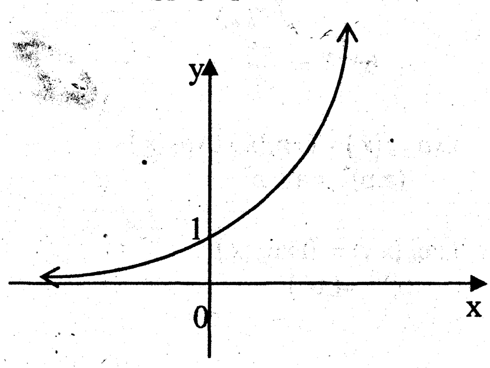
con Dominio en R y Rango en R^+

Representación Grafica

Si $0<b<1$



Si $b>1$



Teorema .- En todo función exponencial

$Exp_b : R \to R^+ / \; y = Exp_b(x)$ se cumple que:

1. La función exponencial es biyectiva

   i) Inyectiva

   Dado $x_1, x_2 \in R$ y $Exp_b(x_1) = Exp_b(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$

   ii) Suryectiva.

   $Rang(Exp_b) = R^+$

2. Si $b > 1$ la función es estrictamente creciente

   i.e

   si $x_1 < x_2$ entonces $Exp_b(x_1) < Exp_b(x_2)$

3. Si $0 < b < 1$ la función es estrictamente decreciente

   i.e

   si $x_1 < x_2$ entonces $Exp_b(x_1) > Exp_b(x_2)$

Teorema.- Sea $x, y \in R$, $a, b \in R^+ - \{1\}$, entonces se cumple que:

1. $Exp_b(x+y) = Exp_b(x) \; Exp_b(y)$

   $b^{(x+y)} = b^x + b^y$

2. $$Exp_b(x-y) = \frac{Exp_b x}{Exp_b y}$$

   $$b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}$$

3. $Exp_{a.b}(x) = Exp_a(x) \; Exp_b(x)$

   $(a.b)^x = a^x . b^x$

4. $Exp_b(x\,y) = (Exp_b(x))^y$

   $b^{(xy)} = (b^x)^y$

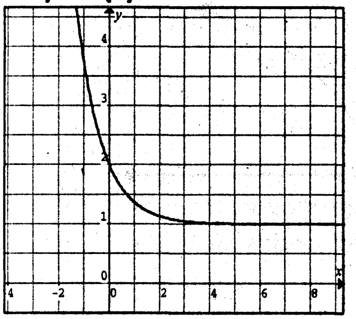
Ejemplo.

A partir de la grafica de la función $f(x) = e^{-x}$, trazar la grafica de las siguientes funciones

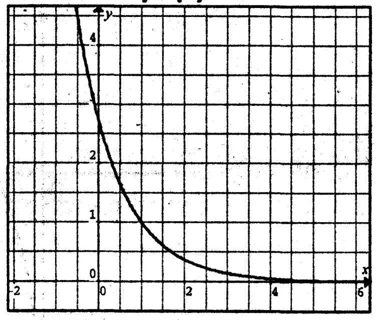
a) $f(x) = e^{-x} + 1$
b) $f(x) = e^{-x+1}$
c) $f(x) = 10e^{-x}$
d) $f(x) = -2e^{-x}$

Solución

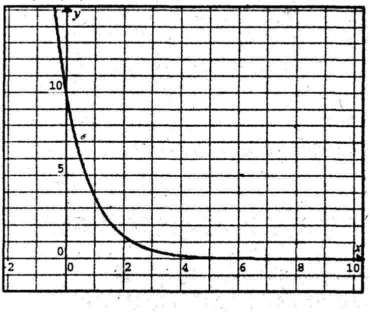
a) $\mathbf{f(x) = e^{-x} + 1}$



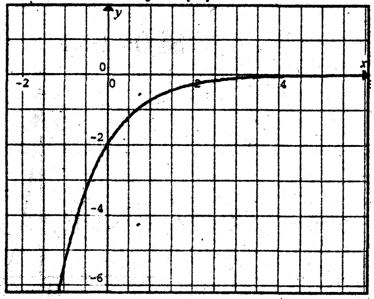
b) $\mathbf{f(x) = e^{-x+1}}$



c) $f(x) = 10e^{-x}$



d) $f(x) = -2e^{-x}$



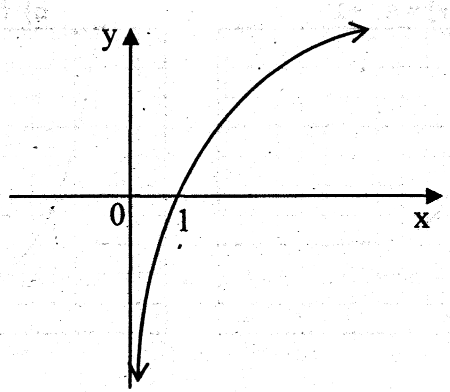
1.5. Función Logarítmica

Definición.- Sea $b \in R^{+} - \{1\}$, La función logarítmica en base b denotado por Log_b es la inversa de la función exponencial Exp_b . i.e.

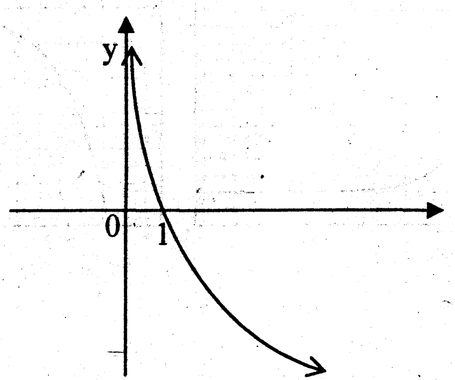
$Log_b : R^{+} \rightarrow R /\ y = log_b(x)$ si y solo si **$x = Exp_b(y)$**
donde el dominio es todo R^{+} y el rango es todo R

Representación Grafica.

Si b>1



Si 0< b<1



Teorema.- En toda función logarítmica
$Log_b : R^+ \to R / \ y = Log_b(x)$ se cumple que:

1. La función es biyectiva
   i) Inyectiva
   Dado $x_1, x_2 \in R$ y $log_b(x_1) = Log_b(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$
   ii) Suryectiva.
   Rang $(Log_b) = R$

2. Si $b > 1$ la función es estrictamente creciente
   i.e si $x_1 < x_2$ entonces $Log_b(x_1) < Log_b(x_2)$

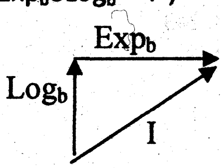
3. Si $0 < b < 1$ la función es estrictamente decreciente
   i.e si $x_1 < x_2$ entonces $Log_b(x_1) > Log_b(x_2)$

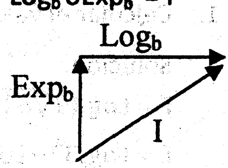
Nota:

- La función exponencial siempre pasa por el punto (0,1)
- La función logarítmica siempre pasa por el punto (1,0).
- La función exponencial es la inversa de la función logarítmica.

i.e.

$Exp_b o Log_b = I$, $Log_b o Exp_b = I$





En la que I es la función identidad.

Teorema. Sea $x, y \in R^+$ y $a, b \in R^+ - \{1\}$,entonces se cumple que:

1. $Exp_b(Log_b(x)) = Log_b(Exp_b(x)) = x$
   $b^{Log_b(x)} = Log_b(b^x) = x$

2. $Log_b b = 1$; $Log_b 0 = -\infty$ si $b>1$; $Log_b 0 = +\infty$ $0<b<1$

3. $Log_b(xy) = Log_b(x) + Log_b(y)$

4. $Log_b(\frac{x}{y}) = Log_b(x) - Log_b(y)$

5. $Log_{(b^n)}(x^m) = \frac{m}{n} Log_b(x)$

6. $Log_b(a)\, Log_a(b) = 1$

7. $Log_b(x) = \dfrac{Log_a(x)}{\log_a(b)}$

Teorema

1. Sea $x \in R^+$, $b>1$, $m \in R$ y $Log_b(x) > m$, entonces se cumple que $x > b^m$
2. Sea $x \in R^+$, $b>1$, $m \in R$ y $Log_b(x) < m$, entonces se cumple que $x < b^m$
3. Sea $x \in R^+$, $0< b<1$, $m \in R$ y $Log_b(x) > m$, entonces se cumple que $0<x < b^m$
4. Sea $x \in R^+$, $0< b<1$, $m \in R$ y $Log_b(x) < m$, entonces se cumple que $x > b^m$

Ejemplo de aplicación

1. Calcular el valor de $E = Log_3\left(\dfrac{9\sqrt[4]{81}}{3\sqrt[7]{243}}\right)$

   Solución.

   $E = Log_3(9\sqrt[4]{81}) - Log_3(3\sqrt[7]{243})$

   $E = Log_3 3^4 - Log_3 3.\, 3^{\frac{5}{7}}$

   $E = 4 - \dfrac{12}{7}$

   $E = \dfrac{16}{7}$

2. Resolver la ecuación: $2.\, 3^{2x+1} - 13.\, 6^x + 6.\ 2^{2x} = 0$

   Solución.

   $2.\, 3^{2x}\, 3 - 13.\, (2.3)^x + 6.\ 2^{2x} = 0$

   $6.\, 3^{2x} - 13.\, 2^x.\, 3^x + 6.\ 2^{2x} = 0$

   $(3.3^x - 2.2^x)(2.3^x - 3.\, 2^x) = 0$

   $3.3^x - 2.2^x = 0 \ \vee \ 2.3^x - 3.\, 2^x = 0$

Si $3.3^x - 2.2^x = 0$ entonces $x = -1$
Si $2.3^x - 3.2^x = 0$ entonces $x = 1$
El conjunto solución es : $\{-1;1\}$

3. Resolver: $Log_{(a^2)}(x^2)$ - $Log_x(a)$ = $Log_9(\frac{1}{27})$

Solución.

$Log_{(a^2)}(x^2) - Log_x(a) = Log_9(\frac{1}{27})$

$\frac{2}{2}\ Log_a x - Log_x(a) = -\frac{3}{2}\ Log_3 3$

$\log_a x - \frac{\log_a a}{\log_a x} = -\frac{3}{2}$

$(\log_a x)^2 + 3\log_a x - 2 = 0$

$(2\log_a x - 1)(\log_a x + 2) = 0$

$2\log_a x - 1 = 0$ entonces $x = \sqrt{a}$

4. $4^{4x+1} \leq 4^{4x+1}$

Solución

si $4^{4x+1} \leq 4^{4x+1}$ entonces $4x+2 \leq 4x+1$

$x \geq 0$

5. Determinar el dominio de la funciOn inversa de

$f(x) = \frac{2^x}{2+2^x}$

Solución

El dominio de la funcion inversa de $f(x) = \frac{2^x}{2+2^x}$

es el rango de la funcio f.

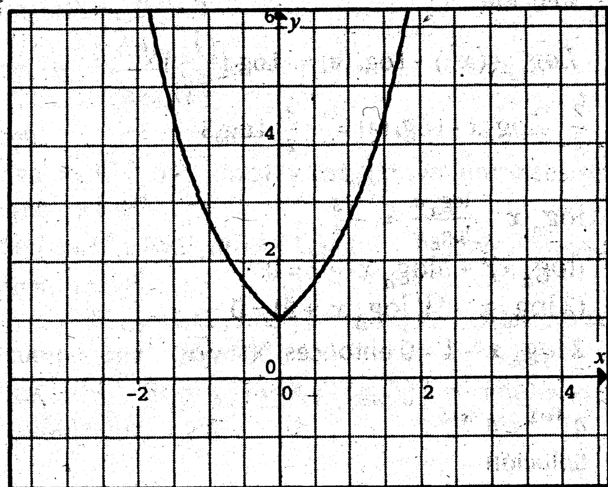
$y(2+2^x) = 2^x$ entonces $2^x = \frac{2y}{1-y}$

$\frac{2y}{1-y} > 0$, entonces Dom(f) =]0,1[

6. Graficar la funcion $f(x) = e^{|x|}$

Solución

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & , \quad x \geq 0 \\ e^{-x} & , x < 0 \end{cases}$$



1.6. Interés Compuesto.

Definición.- Se denomina interés o rédito a la ganancia que produce un capital prestado durante un cierto y según una tasa fijada.

El interés es simple cuando los intereses se retiran periódicamente permaneciendo el capital constante durante todo el tiempo de préstamo constante.

El **interés es Compuesto** cundo los interés no se retiran si no se van acumulando al capital primitivo formando nuevos capitales; se dice entonces que los intereses se capitalizan.

Consideremos el caso general de una inversión que crece con interés compuesto y se P el capital invertido a una tasa de interés R por ciento anual, entonces el saldo o el nuevo capital después de un año será B(t).

$$B(1) = P + \frac{R}{100}P = P\left(1+\frac{R}{100}\right)$$

Consideremos $i = \frac{R}{100}$ entonces $B(1) = P(1+i)$

El saldo en dos años será de

$$B(2) = P(1+i) + i(P(1+i))$$

$$B(2) = P(1+i)^2$$

En forma análoga se deduce el saldo después de t años como:

$$\boxed{B(t) = P(1+i)^t}$$

Ejemplo.
Juan Carlos invierte un capital de 300 nuevos soles a un interés compuesto de anual del 32%. Calcular el valor de la inversión después de 10 años.
Solución.

$$B(t) = P\,(1 + i)^t$$
$$B(10) = 300\,(1 + 0.32)^{10}$$
$$B(10) = 300\,(1.32)^{10}$$
$$B(10) = 4817.93$$

El valor de la inversión de 300 nuevos soles en los 10 años es de 4817.93 nuevos soles

Si el *interés se capitaliza más de una vez por año* por ejemplo en forma mensual, trimestral, semestral etc, en este caso el porcentaje R de la tasa de interés anual se denomina tasa nominal o simplemente tasa de interés anual. Si se compone k veces por año y la tasa de interés nominal es R por ciento entonces el interés en cada composición es $\frac{R}{k}$ por ciento, en t años el numero de composiciones es kt, de donde el saldo B(t) después de t años es:

$$\boxed{B(t) = P\,(1+\tfrac{i}{k})^{kt}}$$

Ejemplo
Pepito de los Palotes invierte su capital de 1000 soles a una tasa de interés compuesto anual del 6%. Determine el saldo después de 10 años si el interés se capitaliza .

a) Trimestralmente
b) Mensualmente

Solución.
a) Trimestralmente

$$B(t) = P\,(1+\tfrac{i}{k})^{kt} \quad \text{entonces} \quad B(10) = 1000(1+\tfrac{0.06}{4})^{40}$$
$$B(10) = 1814.01$$

b) Mensualmente

$B(t) = P\,(1+\frac{i}{k})^{kt}$ entonces $B(10) = 1000(1+\frac{0.06}{12})^{120}$

$B(10) = 1819.397$

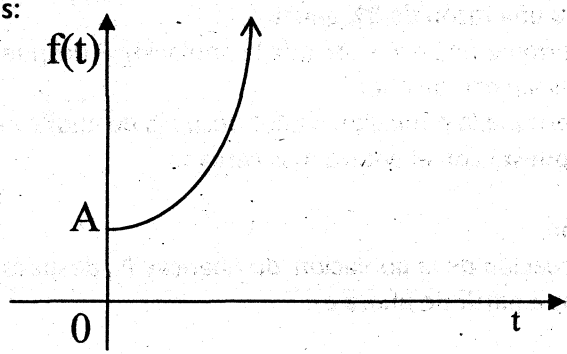
1.7 Ley de Crecimiento.

La ley de crecimiento poblacional obedece al siguiente modelo exponencial

$$\boxed{f(t) = Ae^{kt}} \quad , \quad t \geq 0$$

Donde t es la variable tiempo, A es la población actual y k es la tasa de crecimiento porcentual

La grafica es:



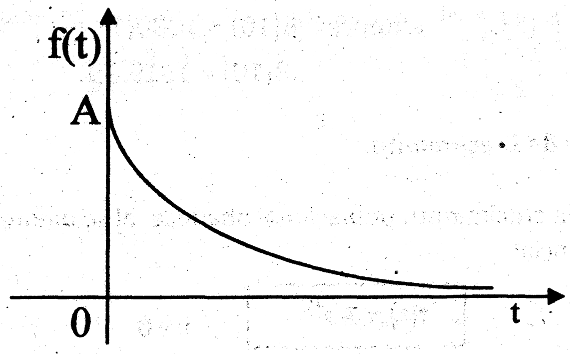
1.8 Ley de Decrecimiento.

La ley de decrecimiento poblacional obedece al siguiente modelo exponencial

$$\boxed{f(t) = Ae^{-kt}} \quad , \quad t \geq 0$$

Donde t es la variable tiempo, A es la población actual y k es la tasa de decrecimiento porcentual

La grafica es:



Ejemplo.

La población de la ciudad de Abancay es 500 000 habitantes y crece a una razón de 3% anual.

a) Determine una ecuación que la población P después de t años a partir de ahora.

b) Determine la población 3 años después de ahora y obtenga la respuesta con el entero más cercano.

Solución.

a)La ecuación de la población de Abancay P , después de t años a partir de ahora es:

$$f(t) = 500000e^{kt}$$

b) La población 3 años después de ahora es:

$$f(3) = 500000e^{0.03x3}$$

$$f(3) = 547\ 087.192$$

La población de Abancay después de 3 años es de 547 087 habitantes

1.9. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

1.9.1. Función Seno.- La función seno denotado por *Sen* , está definido por

$$f: R \rightarrow R / f(x) = Sen(x)$$

donde:

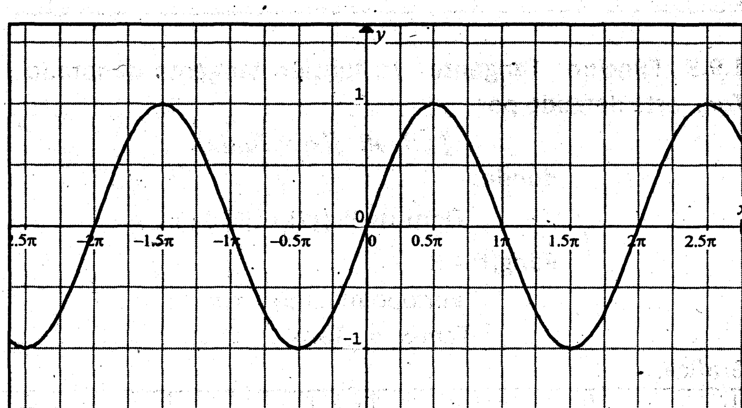
Dom(f)= R

Rang(f) = [-1;1]

Periodo mínimo T = 2π

Sen(-x) = - Senx

Grafica.



1.9.2. Función Coseno.- La función coseno denotado por *Cos*, está definido por

$$f: R \rightarrow R / f(x) = Cos(x)$$

donde:

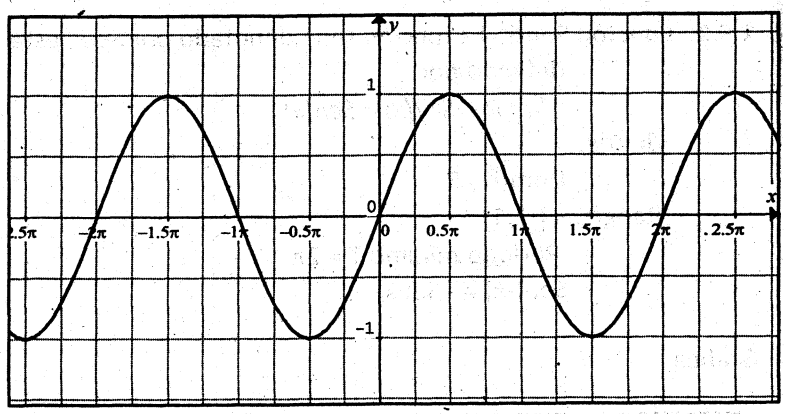
Dom(f)= R

Rang(f) = [-1;1]

Periodo mínimo T = 2π

Cos(-x) = Cosx

Grafica.



1.9.3 Función Tangente.- La función tangente denotado por *Tan*, está definido por

$$f : R \to R \,/\, f(x) = Tan(x)$$

donde:

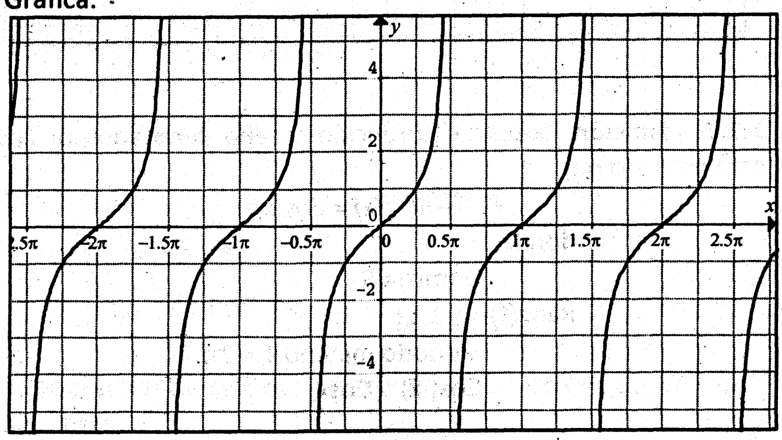
$$Dom(f)= R-\{(2k+1)\tfrac{\pi}{2}\}\ ,\ k\in Z$$

$$Rang(f) = R$$

Periodo mínimo T = π

Tan(-x) = - Tanx

Grafica.

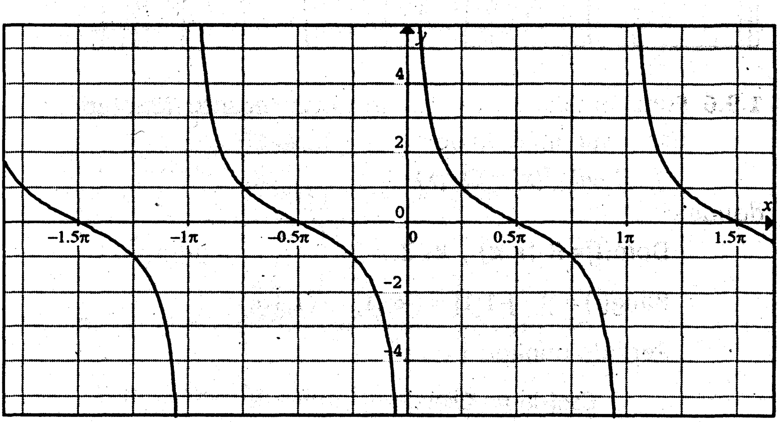


1.9.4 Función Cotangente.- La función cotangente denotado por *Ctg,* está definido por

$$f: R \to R / f(x) = Ctg(x)$$

donde: Dom(f)= R-{kπ}, k∈Z
Rang(f) = R
Periodo mínimo T = π
Cot(-x) = - Cotx

Grafica.



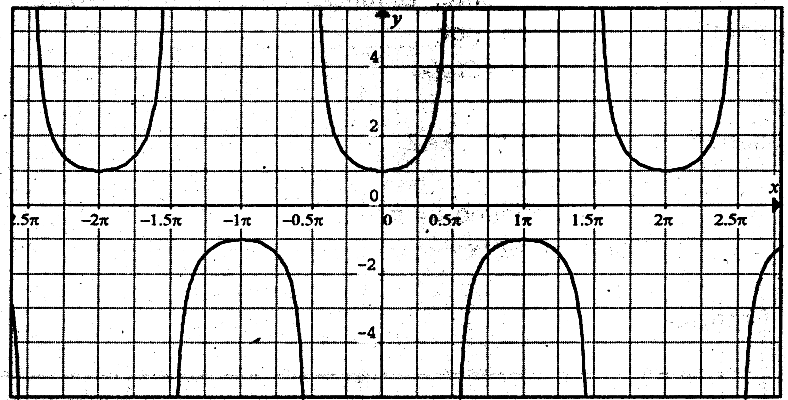
1.9.5 Función Secante.- La función secante denotado por *Sec,* está definido por:

$$f: R \to R / f(x) = Sec(x)$$

donde:

Dom(f)= R-{(2k+1)$\frac{\pi}{2}$}, k∈Z
Rang(f) = R -]-1;1[= ⟨-∞,1⟩ ∪ ⟨1,+∞⟩
Periodo mínimo T = 2π
Sec(-x) = Sec(x)

Grafica.



1.9.6 Función Cosecante.- La función cosecante denotado por *Csc,* está definido por:

f : R→R/ f(x) = Csc(x)

donde:

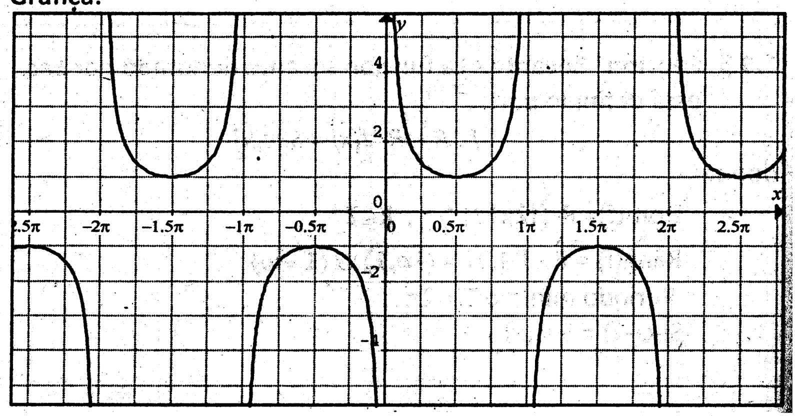
Dom(f)= R-{k π} , k∈Z

Rang(f) = R -]-1;1[= ⟨-∞,**1**⟩ ∪ ⟨**1**,+∞⟩

Periodo mínimo T = 2π

Csc(-x) = - Csc(x)

Grafica.



Identidades Trigonométricas

I .- ***Identidades Reciprocas***

1. $\text{Sen}(x).\ \text{Csc}(x) = 1$
2. $\text{Cos}(x).\ \text{Sec}(x) = 1$
3. $\text{Tan}(x).\ \text{Ctg}(x) = 1$

II.- ***Identidades Pitagóricas.***

1. $\text{Sen}^2(x) + \text{Cos}^2(x) = 1$
2. $\text{Sec}^2(x) = 1 + \text{Tan}^2(x)$
3. $\text{Csc}^2(x) = 1 + \text{Ctg}^2(x)$

III.- ***Identidades por Cociente.***

1. $\text{Tan}(x) = \dfrac{Sen(x)}{Cos(x)}$
2. $\text{Ctg}(x) = \dfrac{Cos(x)}{Sen(x)}$

Funciones Trigonométricas de Ángulos Negativos

- ***Funciones trigonométricas Pares:***

$\text{Cos}(-\alpha) = \text{Cos}\,\alpha$ y $\text{Sec}(-\alpha) = \text{Sec}\,\alpha$

- ***Funciones trigonométricas Impares:***

$\text{Sen}(-\alpha) = -\text{Sen}\,\alpha$; $\text{Tg}(-\alpha) = -\text{Tg}\,\alpha$;

$\text{Ctg}(-\alpha) = -\text{Ctg}\,\alpha$; $\text{Csc}(-\alpha) = -\text{Csc}\,\alpha$

Funciones de la Suma y Diferencia de Ángulos

* $\text{Sen}(\alpha + \beta) = \text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta$

* $\text{Sen}(\alpha - \beta) = \text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta$

* $\text{Cos}(\alpha + \beta) = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta - \text{Sen}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta$

* $\text{Cos}(\alpha - \beta) = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta + \text{Sen}\,\alpha\,\text{Sen}\,\beta$

* $\text{Tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{Tan\,\alpha + Tan\,\beta}{1 - Tan\,\alpha\,Tan\,\beta}$;

* $\text{Tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{Tan\,\alpha - Tan\,\beta}{1 + Tan\,\alpha\,Tan\,\beta}$

* $\text{Ctg}(\alpha + \beta) = \dfrac{Cot\,\alpha\,Cot\,\beta - 1}{Cot\,\alpha + Cot\,\beta}$;

* $\text{Ctg}(\alpha - \beta) = \dfrac{Ctg\alpha . Ctg\beta + 1}{Ctg\beta - Ctg\alpha}$

Formula de Reducción al 1er Cuadrante ***(*** $\forall n \in N$ ***).***

- $\textbf{F.T}\left(\dfrac{n\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm\,\textbf{FT}(\alpha)$, si n es par
- $\textbf{F.T}\left(\dfrac{n\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm\,\textbf{CO.FT}(\alpha)$, n es impar

Nota: El signo depende en que cuadrante se encuentra el lado terminal del ángulo $\dfrac{n\pi}{2} \pm \alpha$.

Angulo Doble

- $\text{Sen}2\alpha = 2\text{Sen}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha$
- $\text{Cos}2\alpha = \text{Cos}^2\alpha - \text{Sen}^2\alpha$
  $= 1 - 2\text{Sen}^2\alpha$
  $= 2\text{Cos}^2\alpha - 1$
- $\text{Tan}2\alpha = \dfrac{2Tan\,\alpha}{1 - Tan^2\alpha}$

Degradación de funciones trigonométricas

1. $2\,\text{Sen}^2(x) = 1 - \text{Cos}(2x)$
2. $2\,\text{Cos}^2(x) = 1 + \text{Cos}(2x)$
3. $4\text{Sen}^3 x = 3\text{Sen}x - \text{Sen}3x$
4. $4\text{Cos}^3 x = 3\text{Cos}x + \text{Cos}3x$

Angulo Mitad

- $\text{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-Cos\alpha}{2}}$
- $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+Cos\alpha}{2}}$
- $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-Cos\alpha}{1+Cos\alpha}} = \dfrac{Sen\alpha}{1+Cos\alpha}$

  $= \dfrac{1-Cos\alpha}{Sen\alpha} = \text{Csc}\,\alpha - \text{Cot}\,\alpha$

El signo ±de la radical, de acuerdo al cuadrante en que se encuentra el ángulo

Transformaciones trigonométricas.

- $\text{SenA} + \text{SenB} = 2\text{Sen}\dfrac{A+B}{2}\text{Cos}\dfrac{A-B}{2}$
- $\text{SenA} - \text{SenB} = 2\text{Sen}\dfrac{A-B}{2}\text{Cos}\dfrac{A+B}{2}$
- $\text{CosA} + \text{CosB} = 2\text{Cos}\dfrac{A+B}{2}\text{Cos}\dfrac{A-B}{2}$
- $\text{CosA} - \text{CosB} = -2\text{Sen}\dfrac{A+B}{2}\text{Sen}\dfrac{A-B}{2}$

III. EJERCICIOS

1.- Supongamos que $4000 es invertido al 11% compuesto semanalmente ¿Cuánto dinero
tendrá en: a) ½ año b) 10 años

2.- Supongamos que $4000 es invertido al 11% compuesto semanalmente ¿Cuánto dinero
Tendrá en: a) ¾ años b) 15 años

3.- Una pareja tiene un niño. ¿Cuánto podrán invertir ellos ahora al 8.25% compuesto diariamente para tener $40 000 para la educación del hijo 17 años después?

4.- Una persona quiere tener $15000 para un carro nuevo dentro de 5 años ¿Cuanto debería ahorrar al 9.75% compuesto semanalmente para comprar un carro dentro de 5 años.

5.- Tenemos dos inversiones de dinero:
a) Invertir $10000 al 8.9% compuesto diariamente
b) Invertir $10000 al 9% compuesto diariamente
¿Cual opción es la más rentable?

6.- Una suma de $5000 es invertido al 13% compuesto semi anualmente, supongamos una segunda inversión de $5000 a una tasa de interés r x 100% compuesto diariamente. ¿Para qué valor de r la inversión segunda es mejor que la primera?

7.- Si usted. Invierte $5520 en una cuenta bancaria que paga 11.38% compuesto continuamente ¿Cuánto dinero tendrá en la cuenta al final de:
a) 6.25 años b) 17 años

8.- Si usted. Invierte $7500 en una cuenta bancaria que paga 8.35% compuesto continuamente ¿Cuánto dinero tendrá en la cuenta al final de:
a) 5.5 años b) 12 años

9.- Se tiene 3 opciones de invertir un dinero en tres empresas financieras por 2 ½ años

Ahorros GILL	8.30%	(CC)
Ahorros Richardson	8.40%	(CT)
Ahorros USA	8.25%	(CD)

Donde CC representa composición continua, CT compuesto trimestralmente y CD compuesto diariamente. Calcular el valor de \$ 1000 invertido en cada cuenta al final de 2 ½ años.

10.- Una inversión paga \$ 30000 después de 10 años desde ahora ¿Cuánto dinero se tendrá que invertir a una tasa de 9% compuesto continuamente?

11.- Una inversión paga \$ 50000 después de 5 ½ años desde ahora ¿Cuánto dinero se tendrá que invertir a una tasa de 10% compuesto continuamente?

12.- ¿Cuántos años una suma de dinero será el doble si es invertido al 15% compuesto anualmente?

13.- ¿En cuántos años una suma de dinero será el cuádruplo si es invertido al 20% compuesto anualmente?

14.- ¿A qué tasa de interés compuesto continuamente \$1000 será \$ 2500 en 10 años?

15.- ¿ En cuántos años una cantidad \$ 5000 será \$ 8000 invertido a una tasa de 9% compuesto continuamente?

16.- Se invierten \$ 12000 EUROS al 18% durante 5 años. Halle el valor futuro del capital si el interés se acumula.

a) Mensualmente b) continuamente

17.- Se invierten \$ 9400 EUROS al 14% acumulada diariamente. ¿Cuánto dinero habrá al cabo de 6 meses? Úsese un año de 360 días. Esto se conoce con el nombre de interés exacto.

18.- ¿Cuánto dinero hay que invertir hoy al 5% de interés continuo para tener 3000 EUROS en 4 años?

19.- Un banco paga un interés continuo del 6% ¿Cuanto tardaran en duplicarse 835 EUROS?

20.- El Banco Nacional paga el 7% de interés acumulado mensualmente, y la Caja Provincial de Ahorros paga el 6.95% de interés continuo ¿ Quien paga mejor?

21.- En 1626, Peter Minuit cambio a abalorios que valían 24 dólares por terreno en la Isla de Maniatan . Supongamos que en 1990 el valor de esta tierra fuese de 25.2 miles de millones de dólares. Halle la tasa de interés continuo a la que hubiera que haber Invertido esos 24 dólares para que tuviera el mismo valor en 1990.

22.- Halle cuanto tiempo tardaran 2000 Euros en convertirse en 5000 invertidos a un interés anual de 8% si los intereses se acumulan.

a) Trimestralmente b) Mensualmente c) Continuamente

23.- ¿Cuánto hay que invertir al 6.25% anual para que dentro de 10 años se tengan 2000 Euros si los intereses se acumulan:

a) Trimestralmente? b) Continuamente?

24.- El Banco Nacional paga 7% de interés anual acumulado mensualmente y la Caja de Ahorros local paga 6.95% de interés continuo. ¿Quién paga más?

25.- Pedro invierte 150 reales con un interés del 12% al mes .¿ Cuál será el monto de Pedro tres meses después?

26.- Pedro tomo un préstamo de 300 reales, con un interés de 15% al mes. Dos meses después, Pedro pago 150 reales y un mes después de ese pago , Pedro cancelo su deuda . ¿Cuál era el valor del último pago?

27.- Pedro tiene dos opciones de pago en al compra de un televisor:

i) Tres cuotas mensuales de $160cada una.

ii) Siete cuotas mensuales de $70 cada una .

En ambos casos, la primera cuota se paga en el momento de la compra . Si el dinero rinde 2% al mes para Pedro , ¿ Cual es la mejor opción que Pedro posee?

28.- Pedro tiene tres opciones de pago en la compra de ropa .

i) Al contado, con 30% de descuento.

ii) En dos cuotas mensuales iguales, sin descuento, venciendo la primera un mes después de la compra.

iii) En tres cuotas mensuales iguales, sin descuento, enciendo la primera en el momento de la compra .

¿Cuál es la mejor opción para Pedro. Si el dinero vale, para el, 25% al mes?

29.- Una tienda ofrece dos opciones de pago:

i) Al contado , con 30% de descuento

ii) En dos cuotas mensuales iguales , sin descuento , la primera cuota siendo cancelada en el momento de la compra ¿ Cual es la tasa mensual de interés incluidas en las ventas a plazo?

30.- Invirtiendo su capital a un interés mensual de 8% ¿En cuánto tiempo Ud. Doblara su capital inicial?

31.- Hallar la tasa anual de interés que equivale al 12% al mes.

32.- Verónica invierte su dinero a un interés de 6% al año con capitalización mensual. ¿Cuál es la tasa anual de interés en la que esta invertido el capital de Verónica?

33.- Determine las tasas efectivas anuales equivalentes a:

a) 30% al año , con capitalización mensual.

b) 30% al año , con capitalización trimestral.

c) i al año, capitalización k veces al año.

34.- La Mesbla , en varias navidades , ofreció a sus clientes dos alternativas de pago :

a)pago en una sola cuota , un mes después de la compra

b) pago en tres cuotas mensuales iguales , venciendo la primera en el momento de la compra . Si Ud. Fuera cliente de Mesbla ,¿Cuál será su opción?

35.- Suponga que se invierten $ 1000 a una tasa de interés anual del 7% . Calcule el saldo después de 10 año si el interés se capitaliza:

a) Anualmente

b) Trimestralmente

c) Mensualmente

36.- Suponga que se invierten $ 5000 a una de interés anual del 10% . Calcule el saldo después de 10 años si el interés se capitaliza:

a) Anualmente

b) semestralmente

c) Continuamente

d) Diariamente (tomando 365 días al año)

37.- Una suma de dinero se invierte a cierta tasa de interés fijo y el interés se capitaliza continuamente. Después de 10 años, el dinero se ha duplicado. ¿Cómo será el saldo al final de 20 años, comparado con la inversión inicial?

38.- Una suma de dinero se invierte a cierta tasa de interés fijo y el interés se capitaliza trimestral. Después de15 años, el dinero se ha duplicado. ¿Cómo será el saldo al final de 30 años, comparado con la inversión inicial?

39.- Se proyecta que dentro de t años la población de cierto país será $P(t) = 50e^{0.02t}$ millones.

a) ¿ Cuál es la población actual?

b) ¿Cuál será la población dentro de 30 años?.

40.- ¿ Cuánto dinero debe invertirse hoy a una tasa de interés anual del 7% capitalizado continuamente, para que dentro de 20 años su valor sea $20000 ? (recuerde que el saldo después de t años es de $\mathbf{B(t) = Pe^{rt}}$,donde r es la tasa de interés expresada como un decimal y P es el depósito inicial).

41.- Se estima que la población de cierto país crece exponencialmente. Si la población era de 60 millones en 1986 y de 90 millones en 1991, ¿Cuál será la población en el año 2001?

42.- El número total de hamburguesas vendidas por una cadena nacional de comida rápida crece exponencialmente. Si se vendieron 4000 millones en 1986 y 12000 millones en 1991 ¿Cuántas se venderán en 1996?

43.- La densidad de población a x millas del centro de cierta ciudad es $D(x) = 12e^{-0.07x}$ miles de personas por milla cuadrada.

a) ¿ Cuál es la densidad de población en el centro de la ciudad?

b) ¿ Cuál es la densidad de población a 10 millas del centro de la ciudad?

CAPÍTULO 2

2. APLICACIONES COMERCIALES

2.1. FUNCIÓN COSTO.

La función costo denotado por $C(x)$ está definido como la suma del costo variable y el costo fijo.

i.e.

$$C(x) = \textit{costos variables} + \textit{costos fijos.}$$

Los costos fijos vienen a ser los costos que no dependen del nivel de producción por ejemplo. La renta, intereses sobre préstamos, salarios de administración, etc.

Los costos variables dependen del nivel de producción, es decir de la cantidad de artículos producidos a si por ejemplo Los costos de la materia prima, mano de obra, etc.

Si los costos variables por unidad de articulo es constante entonces el costo variable total es proporcional a la cantidad de artículos producidos de donde se tiene que

Costo variable = mx, por consiguiente la función lineal de costo total está determinada por.

$$C(x) = mx + b$$

Ejemplo

El costo de fabricar 10 computadoras al día es de \$3 500 mientras que cuesta \$6 000 producir 20 computadoras del mismo tipo en un día . Si el modelo de costo es lineal determinar:

a) La ecuación del costo total.
b) Realizar la grafica de la función costo determinada en la parte a)
c) ¿Cuánto cuesta producir 40 computadoras?

Solución

Si x = 10 computadoras entonces C(x) = 3 500 dólares de donde se tiene el punto A = (10, 3500)

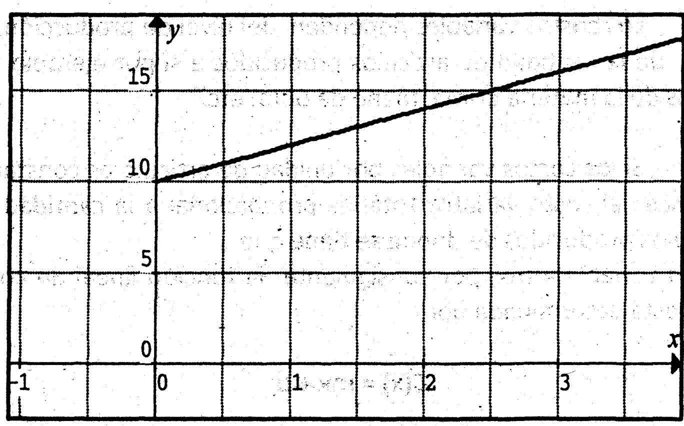
Si x = 20 computadoras entonces C(x) = 6 000 dólares de donde se tiene el punto B = (20, 6000)

Como la función costo es lineal entonces la pendiente e m es .

$$m = \frac{6000-3500}{20-10} = 250$$

La ecuación del costo total es: C-3500 = 250(x-10)

C(x) = 250x + 10



2.2. FUNCIÓN INGRESO (R(x) ó I(X))

Consideremos **p** el precio de venta de un determinado artículo y **x** el número de artículos vendidos, la función de ingreso total producido por la venta de x artículos a un precio p está definido por:

$$R(x) = px$$

Donde x se denomina como volumen de ventas y p el precio de venta por cada artículo producido.

Ejemplo.

El gobierno central a través del Programa mi vivienda ha construido una nueva unidad de 40 departamentos para rentar. Se sabe por las investigaciones de mercado que si asigna una renta de 150 dólares al mes se ocuparán todos los departamentos, por cada incremento de 5 dólares en la renta un departamento quedará vacío.

a) Determinar la función ingreso

b) ¿Qué renta mensual deberá asignar a cada departamento de modo que obtenga el ingreso máximo por las rentas mensuales? . Calcule este ingreso máximo.

c) Trace la grafica de la función ingreso total.

Solución.

x:= numero de departamentos en renta

p:= Precio de la renta de cada departamento.

y= R(p):= ingreso total

Sabemos que R(p) = p.x

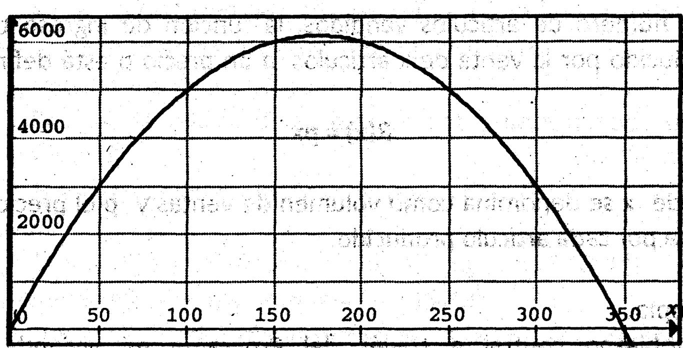
Si p= 150 entonces x= 40

Si p= 155 entonces x= 39

$$m = \frac{40-39}{150-155} = -\frac{1}{5}$$

$x - 40 = -\frac{1}{5}(p - 150)$, entonces $x = -\frac{1}{5}p + 70$

La función ingreso total es: $R(p) = -\frac{1}{5}(p-350)p$



La renta que optimiza el ingreso es de p = 175dolares cuyo ingreso máximo es de R= 6125 dólares al mes

Ejemplo

La empresa de turismo INKA S.A. Alquila sus buses a grupos de turistas para transportarse de Cusco a Ollantaytambo, la empresa tiene una política de fijación de precios en la que si se presentan grupos de 200 turistas, el pasaje es de 8 nuevos soles por persona. Por cada incremento de un turista a grupo de 200, el pasaje se reduce en 10 céntimos.

a) Determinar la función de ingreso total.

Solución.

x:= número de turistas por grupo

p:= Precio del pasaje de cada turista en bus para transportarse de Cusco a Ollantaytambo.

y= R(p):= ingreso total

Sabemos que R(p) = p.x

Si x= 200 entonces p = 8

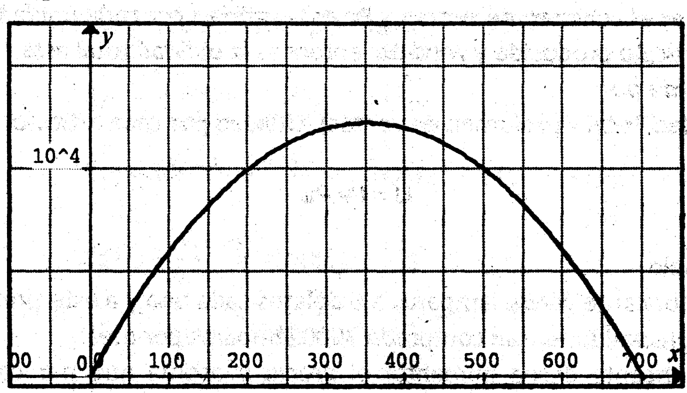
Si x= 201 entonces p = 7.9

$$m = \frac{8-7.9}{200-201} = -\frac{1}{10}$$

$p - 8 = -\frac{1}{10}(x - 200)$, entonces $p = -\frac{1}{10}x + 70$

$\mathbf{R(x) = -\frac{1}{10}x(x - 700)}$

c) La grafique la función ingreso.



b) ¿Cuánto de ingreso máximo tiene la empresa? y ¿cuál sería el precio del pasaje de un turista que hace que la empresa no tenga ingreso con precio diferente del cero?

Rta. El precio que maximiza el ingreso es de 350 nuevos soles y el ingreso máximo es de 12 250 dólares.

Si x = 0 entonces $p = -\frac{1}{10}(0) + 70 = 70$, al precio de 70 nuevos soles no habrá ingreso de la empresa de turismo INKA S.A

2.3. FUNCIÓN UTILIDAD (U(x))

La función utilidad está definido como la diferencia de la función de ingreso total y del costo total.
i.e.

$$U(x) = R(x) - C(x)$$

Sí Pv es el volumen de ventas y Pu es la utilidad por cada unidad de articulo producido y vendido entonces la utilidad total esta definida por:
Utilidad Total = (Volumen de ventas) (Utilidad por cada artículo)
o

$$U = Pv.Pu$$

Ejemplo
Un fabricante vende lámparas a 6 dólares cada una y a este precio los consumidores han comprado 3000 lámparas por mes.
El fabricante desea aumentar el precio y estima que por cada incremento de un dólar en el precio, se venderán 1000 lámparas menos cada mes. Las lámparas pueden producirse a un costo de 4 dólares cada una.

a) Exprese la utilidad mensual de fabricante como una función del precio al que se venden las lámparas.
b) Grafique y calcule el precio óptimo de venta.

SOLUCIÓN:

a) x:= numero de lámparas
p:= Precio de venta de cada lámpara.
y= U(p):= Utilidad total

Utilidad U(p) = (Utilidad por lámpara)(# de incrementos)
Utilidad por lámpara = p - 4
Si p= 6 dólares entonces x= 3000 lámparas
Si p= 7 dólares entonces x= 2000 lámparas

$$m = \frac{3000-2000}{6-7} = -1000$$

x- 3000 = -1000(p- 6) , entonces x = -1000p + 9000

U(p) = (p-4)(-1000p+9000)

$\therefore$ U(p) = -1000(p-4)(p - 9) //

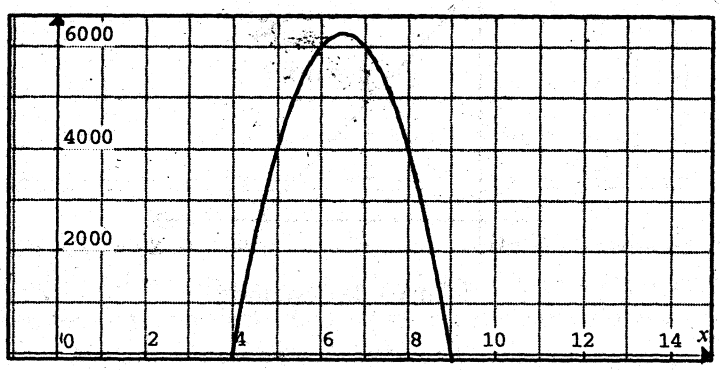
b) U(p) = 9000p – 1000p^2 - 36000 + 4000p

U(p) + 36000 = - 1000(p^2 – 13p)

$$U(p) + 36000 - \frac{16900}{4} = -1000[p^2 - 13p + (13/2)^2]$$

$$U(p) - \frac{25000}{4} = -1000(p - \frac{13}{2})^2$$

(U(p) - 6250) = - 1000(p - 6,5)^2



Precio óptimo de venta será de 6,5 dólares
Utilidad máxima es 6250 dólares.

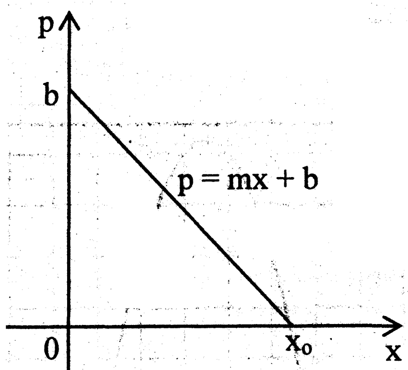
2.4. LEY DE LA OFERTA Y DEMANDA

LEY DE LA DEMANDA.-Es la relación que describe la cantidad de un determinado artículo que los consumidores estén dispuestos a comprar a varios niveles de precio. La ecuación lineal que describe este comportamiento es:

$$D: \ p = mx + b$$

Donde p es el precio por unidad de artículo, m y b son constantes.

Si el precio por unidad de un articulo aumenta la demanda por el articulo disminuye, porque menos consumidores podrán adquirir el producto, mientras que si el precio del articulo disminuye la demanda se incrementara , en otras palabras la pendiente m es negativa ($m<0$) en la ecuación de la demanda.



Curva de demanda

Ejemplo

La editorial de San Marcos puede vender 20 textos de matemática aplicada cada día a un precio de 25 soles cada uno, pero puede vender 30 unidades del mismo texto si los fija a un precio de 20 soles cada texto. Determine la ecuación de la demanda suponiendo que es lineal.

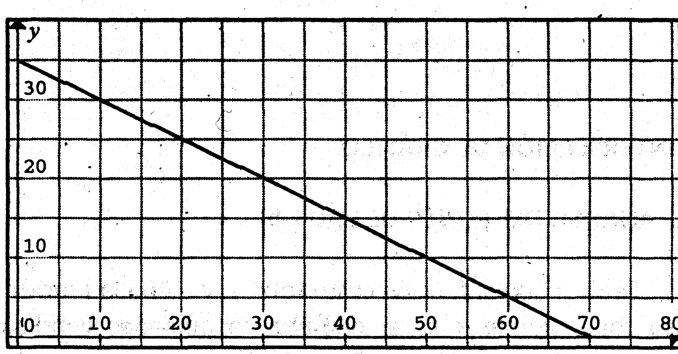
Solución.

Sea x el número de textos vendidos y p es el precio de venta de cada libro entonces se tiene que:

Si x = 20 entonces p = 25 de donde se tiene el punto
A = (20, 25)
Si x = 30 entonces p = 20 de donde se tiene el punto
B = (30, 20)

Como la función demanda es lineal entonces la pendiente m es −1/2 de donde la ecuación del costo total es

$2p + x - 70 = 0$

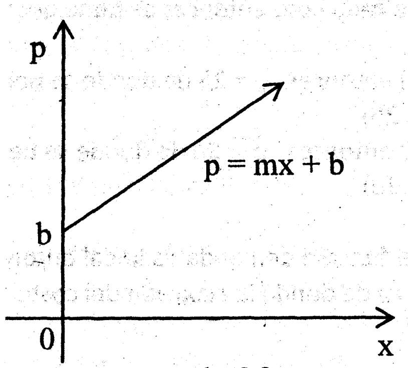


LEY DE LA OFERTA.- Es la relación que describe la cantidad de artículos o productos que los fabricantes o productores estén dispuestos poner en el mercado a diferentes niveles de precio.

La relación lineal de la *OFERTA* está dado por

$$S:\ p = mx + b$$

Los fabricantes inundaran el mercado de productos si el precio de cada artículo es alto y si baja el precio, habrá escasez de productos en el mercado es decir la oferta aumentara al subir el precio y la oferta disminuye al bajar el precio , de donde se concluye que m es positivo (m>0) en la ecuación de la demanda.



Curva de Oferta

2.5. INTERSECCIÓN DE GRÁFICOS

2.5.1. ANÁLISIS DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

Sea $y = C(x)$ la función costo total y $y = R(x)$ la función del ingreso total, donde x es el número de unidades vendidas y fabricadas. La intersección de C(x) y R(x) se denomina ***punto de equilibrio.***

i.e. si $C(x_0) = R(x_0)$ entonces el punto (x_0, y_0) se denomina punto de equilibrio.

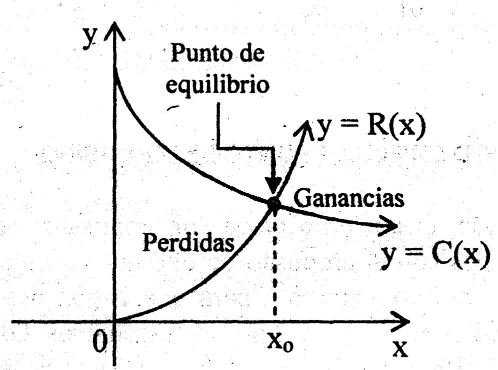
Donde x_0 es el volumen de producción o de ventas donde no existe ganancia o la utilidad es cero $(U(x_0)=0)$
Si el nivel de producción está por debajo del punto de equilibrio entonces habrá perdida mientras que si el nivel producción está por encima del punto de equilibrio entonces habrá ganancias

i.e.

i) si $C(x) < R(x)$ existirá ganancia en el proceso productivo.

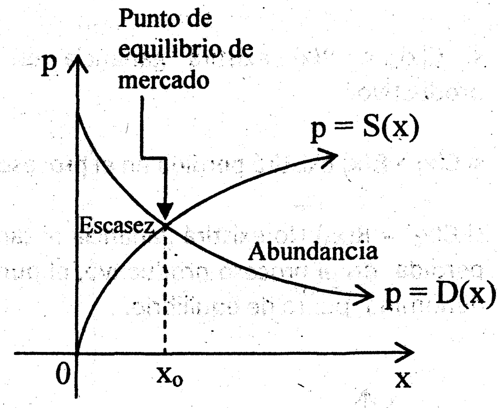
ii) si $C(x) > R(x)$ existirá perdida en el proceso productivo.

iii) si $C(x_0) = R(x_0)$ No existirá ganancia ni tampoco habrá perdida en el proceso productivo, el punto (x_0,y_0) se denomina punto de equilibrio. .



2.5.2. EQUILIBRIO DE MERCADO.-

Sea $p = D(x)$ y $p = S(x)$ las funciones de Demanda y Oferta respectivamente, el punto de intersección de la curvas de oferta y demanda se denomina ***equilibrio de mercado***. La coordenada P, en este punto es el *Precio de equilibrio*, que es el precio de mercado al cual no habrá abundancia ni escasez de artículos.



2.6. IMPUESTO ESPECIAL Y PUNTO DE EQUILIBRIO.

Con frecuencia, el gobierno grava con impuestos adicionales a ciertos artículos con el propósito de obtener más ingresos o dar subsidios a los productores para que hagan accesible estos artículos a los consumidores a precios razonables. Consideremos el efecto adicional o subsidio sobre el punto de equilibrio de mercado con las siguientes condiciones:

i) La cantidad demandada por los consumidores sólo depende del precio; es decir la ecuación de la demanda no cambia.

ii) La cantidad ofrecida por los proveedores está determinado por el precio recibido por ellos. El precio recibido por ellos es $p_1 = p + t$
donde t es el impuesto por unidad , p es el precio aceptado por unidad por el proveedor y p_1 es la cantidad pagada por unidad por el consumidor.

Ejemplo.

La ley de la demanda para cierto articulo es

D: $5p + 2x = 200$ y la ley de la oferta es

S: $5p = 4x + 50$.

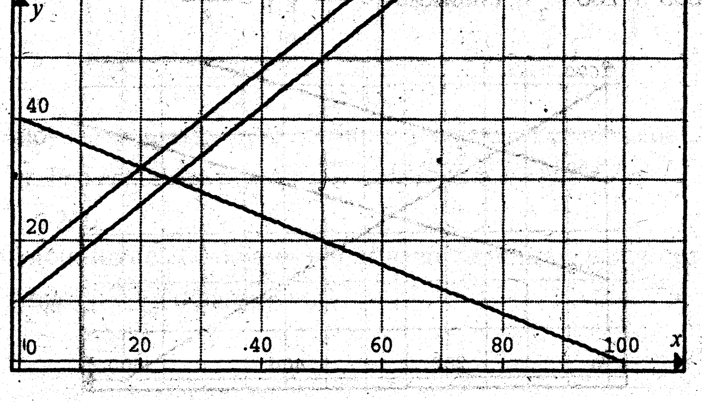
a) Determine el precio y la cantidad de equilibrio.

b) Encuentre el precio y la cantidad después de que se ha fijado un impuesto de 6 por unidad. Determine el incremento en el precio y la disminución en la cantidad demandada.

Solución

a) para determinar el punto de equilibrio se tiene que
$200 - 2x = 4x + 50$ de donde el punto de equilibrio es $x = 25$ y $p = 30$

b) En este caso la ecuación de la demanda se mantiene inalterable es decir
D: $5p_1 + 2x = 200$ y el precio en la ecuación de la oferta sufre un incremento $p_1 = p + 6$ es decir S: $p_1 = \frac{4}{5}x + 16$ de donde el punto de equilibrio es $x = 20$ y $p = 32$ por consiguiente el incremento del precio es $32 - 30 = 2$ y al disminución de la cantidad demanda es 5 unidades.



2.7. INGRESO FISCAL

Sea T el ingreso fiscal, t es el impuesto por unidad y q es la cantidad de equilibrio de las funciones de oferta y demanda después del impuesto. El ingreso fiscal se define como

$$T = t.q$$

Ejemplo.

Se la función de demanda y oferta definido por:

D: $p + q = 600$ y S: $2p = 400 + q$

Donde p dólares es el precio unitario y q es el número de unidades.

a) Determine el punto de equilibrio antes del impuesto y grafique en un solo sistema de coordenadas la ecuación de oferta y demanda.

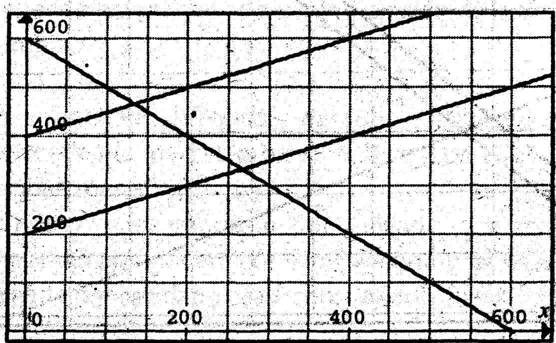
b) Determine la función de ingreso fiscal en función de la demanda q.

c) Calcule el valor del impuesto t que maximice el ingreso fiscal además calcule el valor de este ingreso fiscal

Solución.

a) El punto de equilibrio se determina cuando: D(q) = S(q)

$q - 600 = 200 + \frac{1}{2}q$, entonces $q = \frac{800}{3}$ y $p = \frac{1000}{3}$



b) La función de ingreso fiscal está definido por:

T = t.q

Como D: $p = 600 - q$ y S: $p = 200 + \frac{1}{2}q + t$

Entonces el punto de equilibrio esta dado por.

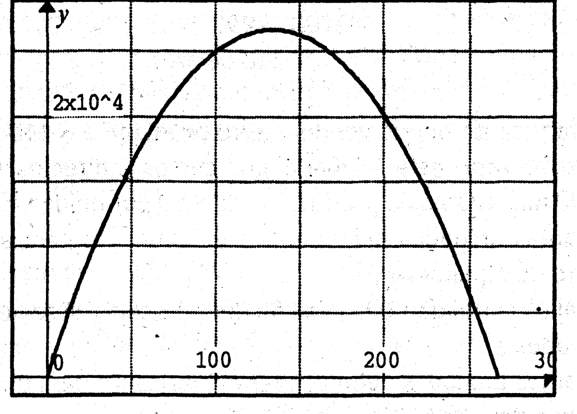
$q - 600 = 200 + \frac{1}{2}q + t$ de donde se tiene que

$t = 400 - \frac{3}{2}q$, por consiguiente el ingreso fiscal es:

$$\mathbf{T = (400 - \frac{3}{2}q).q}$$

c) **La grafica de la función ingreso fiscal es:**

$$T = (400 - \frac{3}{2}q).q$$



El valor del impuesto t que maximice el ingreso fiscal de acuerdo al grafico esta dado por $q = \frac{400}{3}$, de donde $t = 400 - \frac{3}{2}q$

$t = 200$.

Un impuesto de 200 dólares por articulo maximizara el ingreos fiscal en $\frac{8000}{3}$ dólares.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

1.- El costo total, en dólares de fabricar q unidades de un determinado artículo, está dado por la función:
$C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$. Calcular

a) El costo de producir 10 unidades de artículo
b) El costo de producir la décima unidad del artículo.

SOLUCIÓN

a) $C(10) = ?$, como $C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$

$$C(10) = 10^3 - 30(10)^2 + 500(10) + 200$$
$$C(10) = 3200 \text{ dólares}$$

b) Costo de la décima unidad $= C(10) - C(9)$

$$= 3200 - 2990$$
$$= 210 \text{ dólares.}$$

2.- Un fabricante puede vender cierto producto a \$ 110 la unidad. El costo total está formado por costos indirectos fijos de \$ 7,500 más costos de producción de \$ 60 por unidad.

a) ¿Cuántas unidades debe vender le fabricante para alcanzar el punto de equilibrio?
b) ¿Cuál es la utilidad o la pérdida del fabricante si se venden 100 unidades ?
c) ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para obtener una utilidad de \$ 1,250?

SOLUCIÓN

Ingreso total será $= R(x) = 110x$, siendo z el número de unidades vendidas y fabricadas.
El costo total será $= c(x) = 60x + 7500$

a) $y = 110x$entonces $110x = 60x + 7500$

$$50x = 7500$$
$$x = 150 \text{ unidades}$$

b) Utilidad = Ingreso - Costo

$P(x) = R(x) - c(x)$

$P(x) = 110x - 60x - 7500$

$P(x) = 50x - 7500$

Si $x = 100$

$P(100) = 50(100) - 7500 = 100(50-75)$

$P(x) = -2500$ dólares.

Pérdida de 2500 dólares.

c) Como utilidad $y = 50x - 7500$

$1250 = 50x - 7500$

$8750 = 50x$

$x = 175$ unidades.

3.- Determinada agencia de alquiler de automóviles cobra $ 25 más 60 centavos por kilómetro. Una segunda agencia cobra $ 30 más 50 centavos por kilómetro. ¿ Qué agencia ofrece el mejor trato ?.

SOLUCIÓN:

Costo de la primer agencia $= C_1(x)$

Costo de la segunda agencia $= C_2(x)$

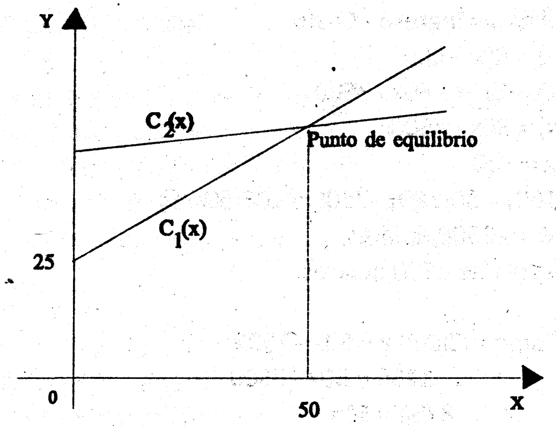
X es la distancia que recorre el automóvil

$C_1(x) = 25 + 0.6x$, $\qquad C_2(x) = 30 + 0.5x$

El punto de equilibrio será ==> $25 + 0.6x = 30 + 0.5x$

$0.1x = 5$

$x = 50$ Km.

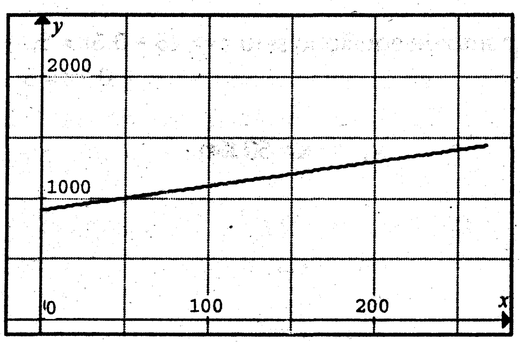


a segunda agencia para viajes largos ofrece mejor trato.
La primera agencia para viajes cortos ofrece mejor trato

4) Una empresa abona a sus agentes de ventas 900 soles por alojamiento y alimentación, más 2 soles por cada kilómetro de viaje en coche. Escribir una ecuación lineal que representa el costo diario C en términos del número X de Km. de viaje.

SOLUCIÓN:

Costos fijos = 900 $\qquad$ C = f(x)
x = Km. recorridos $\qquad$ C = 2x + 900 //
C(x) = Costo diario



5) Una fabrica paga a sus trabajadores 90 soles a la hora más un plus de 7,5 soles por cada unidad producida. Hallar una ecuación lineal para el salario por hora trabajada en términos del número x de unidades producidas por hora.

SOLUCIÓN:
Salario en una hora = 90 soles
X = # de artículos producidos
Tasa = 7,5
S(x) = ? S(x) = 90 + 7,5x //

6) Un pequeño comercio adquiere un equipo por 875 dólares. Tras 5 años, quedará obsoleto y sin valor alguno. Escribir una ecuación lineal para el valor y del equipo durante esos 5 años. (t en años)

SOLUCIÓN:
Costo del equipo = 875 dólares $\therefore$ $V(t) = 875 - \frac{875}{5}t$
V(t) = Valor del equipo

Para $0 \leq t \leq 5$ $V(t) = 875 - 175t$

$\therefore$ $V(t) = 875 - 175t$
Para $0 \leq t \leq 5$ //

7) Una empresa construye un almacén por 825000 soles. Tendrá una vida útil estimada en 25 años después de los cuales se espera que si valor sea de 75000 soles. Escribir una ecuación lineal para el valor "y" del almacén durante esos 25 años de vida útil.
SOLUCIÓN:
V = 825000 Cuando t = 0 --> (0, 825000)
V = 75000 Cuando t = 25 --> (25, 75000)
V(t) = ?

$$(V - 825\,000) = -\frac{825000 - 75000}{25 - 0}(t - 0)$$

V = 825000 - 30000t //

8) Una agencia inmobiliaria dispone de un edificio con 50 departamentos. Cuando el alquiler es 380 dólares mensuales, los 50 están ocupados, pero con un alquiler de 425 dólares, la media de ocupación baja a 47. Supongamos que la relación entre el precio P del alquiler y la demanda x es lineal. Determinar:

a) La ecuación lineal que describa x en términos de P

b) El número de departamentos que estarán ocupados sí se establece un alquiler de 455 dólares.

c) Predecir el número de departamentos ocupados con un alquiler de 395 dólares.

SOLUCIÓN:

a) Si P = 380 dólares --> x = 50 $\therefore$ (380, 50)

P = 425 dólares --> x = 47 $\therefore$ (425, 47)

x = f(p)

$$m = \frac{50-47}{380-425} = -\frac{1}{15}$$

$(x-50) = -\frac{1}{15}(p-380) \rightarrow x = \frac{1}{15}(1130-p)$ //

15

b) Si p = 455 --> x = 45 departamentos ocupados

c) Si p = 395 --> x = 49 departamentos ocupados

9.- El número de abonados a una emisora de televisión por cable era en 1980 de 16 millones y en 1986 de 37,5 millones. Determinar:

a) La ecuación para este caso, sabiendo que en 1980 t=0

b) En 1992 el número de abonados será ?

c) Qué información encierra la pendiente de la ecuación de este caso.

SOLUCIÓN:
y = # de abonados en millones
t = El tiempo, en t=0 el año será 1980.

1980 existen 16 millones --> (0, 16)
1986 existen 37,5 millones --> (6, 37.5)

c) $m = \dfrac{37{,}5 - 16}{6 - 0} = \dfrac{21{,}5}{6} == \dfrac{43}{12}$

La pendiente es la Tasa de crecimiento del número de abonados a la emisora televisora

a) $y - 16 = \dfrac{43}{12}(t-0) \dashrightarrow y = \dfrac{43}{12}t + 16$ //

b) Para t=12 en 1990 --> y = 59 millones.

10.- Un fabricante puede producir radios a un costo de 2 dólares por unidad. Los radios se venden a 5 dólares cada uno y a este precio los consumidores han comprado 4000 radios al mes. El fabricante planea aumentar el precio de los radios y estima que por cada incremento de un dólar en el precio, se venderán 400 radios meno cada mes. Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio al que se venden los radios.
Determinar la grafica y la utilidad máxima.

SOLUCIÓN:
Utilidad = (Cantidad radios vendidas)(Utilidad por radio)

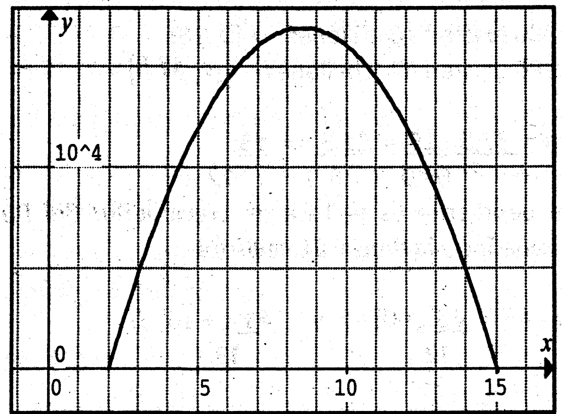
(Cantidad radios = 4000-400(# de aumentos de un dólar)
(# de aumentos de un dólar) = x - 5, entonces

(Cantidad radios vendidos = 4000 - 400(x - 5)
= 400(10 - x + 5)
= 400 (15 - x)

Utilidad por radio = (Precio de venta) - precio de costo

$= x - 2$

$\therefore\ U(x) = 400(15-x)(x-2)$



La utilidad máxima es de 16 900dolares y el precio optimo es de 6,5 dólares.

11.- Cada unidad de un determinado artículo cuesta $P = 35x + 15$ centavos cuando se producen x unidades del artículo. Si todas las x unidades se venden a este precio. Exprese los ingresos obtenidos de las ventas como una función de x.

SOLUCIÓN:

R(x) = Ingreso = (Precio de venta)(# de artículos)

$R(x) = x\,(35x + 15)$

12.- Un importados de café brasileño estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $Q(P)= (4374)/P^2$ kilógramos de café a la semana cuando el precio sea P dólares por kilógramo. Se estima que dentro de t semanas el precio será $P(t)= 0{,}04t^2 + 0{,}2t + 12$ dólares por kilógramo.

a) Expresar la demanda de consumo semanal de café como una función de t.
b) Dentro de 10 semanas ¿Cuántos kilógramos de café compraran los consumidores al importador?.
c) Cuándo alcanzará la demanda de café 30.37 kilógramos.

SOLUCIÓN:

a)

$Q(P) = \frac{4\,374}{p^2}$

$(Q(P))(t) = Q(P(t)) = Q(t)$

$P(t) = 0.04t^2+0,2t+12$ como $Q(P) = \frac{4\,374}{p^2}$ entonces

$$Q(t) = \frac{4\,374}{(0.04t^2+0.2t+12)^2}$$

b) $Q(10) = ?$ se tiene $Q(10) = \frac{4\,374}{(0.04(10)^2+0.2(10)+12)^2}$

$$Q(10) = \frac{4\,374}{(4+2+12)^2}$$

$Q(10) = 13{,}5$ kilógramos

c) como $Q(t) = 30{,}375$ kilógramos, para determinar t se

$3\ 0{,}375 = \frac{4\,374}{0.04t^2+0.2t+12)^2}$

$(0{,}04t^2+0{,}2t+12)^2 = 144$

$0{,}04t^2+0{,}2t+12 = 12$

$t = 0$ // primeros días de la semana.

13.- Un fabricante de muebles puede vender mesas de comedor a 70 dólares cada una. El costo total para el fabricante está constituido por costos indirectos fijos de 8000 dólares más costos de producción de 30 dólares por mesa.

a) ¿Cuántas mesas debe vender el fabricante para alcanzar el punto de equilibrio?
b) ¿Cuántas mesas debe vender el fabricante para obtener una utilidad de 6000 dólares?
c) ¿Cuál será la utilidad, o la pérdida del fabricante si se venden 150 mesas?
d) Elabore la gráfica de las funciones de ingreso total y costo total para el fabricante en un mismo conjunto de ejes. Con base en la gráfica explique cómo puede interpretarse el costo indirecto.

SOLUCIÓN:

a) Precio de venta = 70 dólares c/u.
Costos Indirectos fijos = 8000 dólares
Costo de producción x c/mesa = 30 dólares
x = número de mesas fabricadas
C(x) = Costo de producción
R(x) = Ingreso total
C(x) = Costos Indirectos fijos + Costo de producción c/u.
C(x) = 8000 + 30x //

R(x) = (# de mesas)(precio de venta)
R(x) = 70x

Condición de punto de equilibrio R(x) = C(x)

$$70x = 8000 + 30x$$

x = 200 mesas debe vender el fabricante para alcanzar el punto de equilibrio.

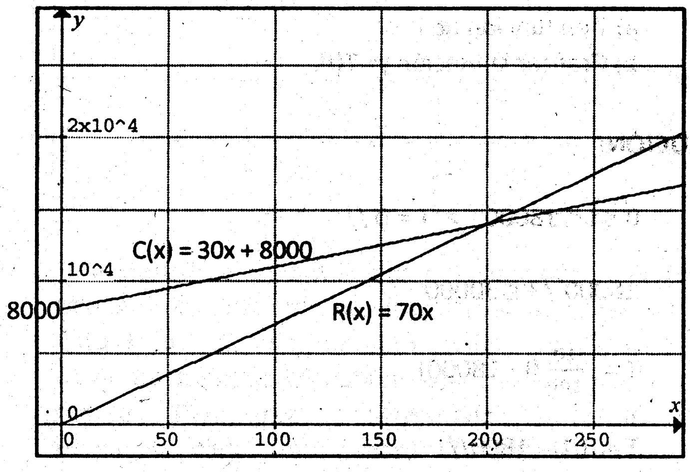
b) $U(x) = \text{Utilidad} = R(x) - C(x)$
$U(x) = 70x - (8000 + 30x)$
$U(x) = 40x - 8000$

Si $U(x) = 6000$, entonces $x=?$
$6000 = 40x - 8000 \dashrightarrow 40x = 14000$
$x = 350$ mesas//

c) $U(x) = 40x - 8000$
$U(150) = ?$

$U(150) = 40(150) - 8000$
$= 6000 - 8000$
$= -2000$
Pérdida de 2000 dólares.

d) La gráfica de las funciones de ingreso total y costo total para el fabricante en un mismo conjunto de ejes es:.



Los costo indirectos de 8000 dólares viene a ser el intercepto con el eje y que significa los costo que no dependen del nivel de producción de las mesas

15.- El sistema de cobro de impuestos a la renta en el país por la Superintendencia Nacional de Administración Tributaria (SUNAT) está determinada de la siguiente manera:
Los habitantes que tienen ingresos gravables en sus primeros 18000 nuevos soles no pagarán impuestos.
Las tasas de impuestos graduados para niveles de ingreso más alto se dan en la tabla.

Ingresos Gravables (nuevos soles)	Tasa de Impuesto (%)
$18000 < I \leq 30000$	10
$I > 30000$	18

Si denotamos con I los ingresos gravables y con T la cantidad gravada, determinar:

a) T en función de I.
b) Graficar la función y= T(I).

SOLUCIÓN:

a) $0 \leq I \leq 18000 \rightarrow T = 0$ //

b) $18000 < I \leq 30000$

$$T = \frac{10}{100}(I - 18000)$$

$T = 0.1I - 1800$//

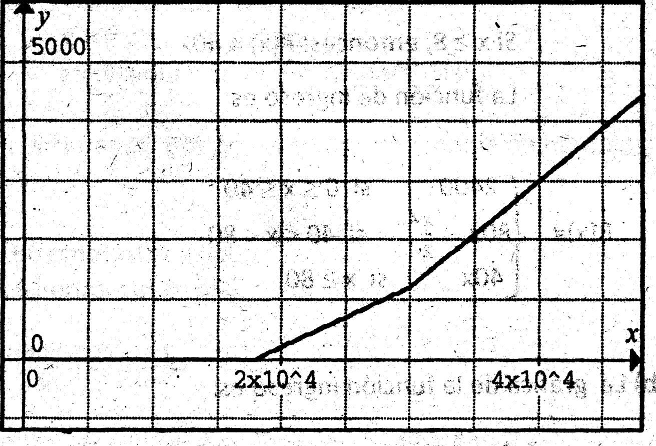
Si $I = 30000 \rightarrow T = 0.1(30000) - 1800$
$T = 1200$ soles.

c) $I > 30000 \dashrightarrow T = 1200 + \frac{18}{100}(I - 30000)$

$$T = 1200 + 0.18I - 5400$$
$$T = 0.18I - 4200//$$

La función que determina la tasa de impuesto es:

$$T(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le I \le 18000 \\ 0.1I - 1800 & \text{si } 18000 < I \le 30000 \\ 0.18I - 4200 & \text{si } I > 30000 \end{cases}$$



16.- Una compañía de autobuses ha adoptado la siguiente política de fijación de precios, para grupos que desean alquilar los vehículos a grupos conformados por no más de 40 personas se les cobrará una cantidad fija de 2400 dólares. Para grupos conformados entre 40 y 80 personas, cada una pagará 60 dólares menos 50 centavos de dólar, por cada persona adicional a 40. La tarifa más baja de la compañía es 40 dólares por persona y se ofrece a grupos de 80 personas o más.

a) Exprese los ingresos de la compañía de autobuses como una función del tamaño del grupo.
b) Elabore la gráfica de la función ingreso.

SOLUCIÓN:
a) Sea x el número de personas, P = precio en función de x

Si $0 \leq x \leq 40$, entonces: P = 2400

Si $40 < x < 80$, entonces:

$P(x) = [60 - 0.5(x-40)](x)$

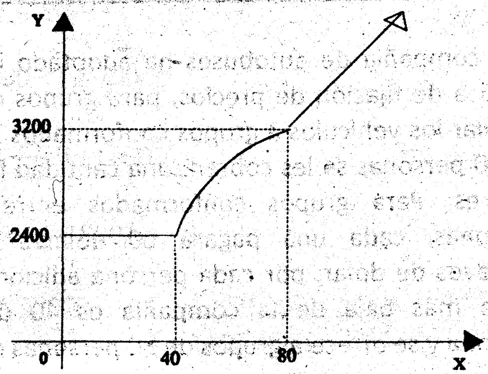
$P(x) = 80x - 0.5x^2 = 80x - \frac{x^2}{2}$

Si $x \geq 8$, entonces: $P(x) = 40x$

La función de ingreso es:

$$R(x) = \begin{cases} 2400 & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ 80x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 40 < x < 80 \\ 40x & \text{si } x \geq 80 \end{cases}$$

b) La gráfica de la función ingreso es:



17.- Un agricultor de frutas cítricas de Quillabamba estima que si se plantan 60 naranjos, cada árbol producirá en promedio 400 naranjas. La producción medía disminuirá en 4 naranjas por árbol por cada árbol adicionalmente plantado en la misma área.

a) Exprese la producción total del agricultor como una función de la cantidad árboles plantados.
b) Elaboré la gráfica y calcule la cantidad de árboles que el cultivador debería plantar para maximizar la producción

SOLUCIÓN:

P(x)= producción del agricultor
x = # de naranjos por área.
z:= Producción media de naranjas

P(x)= (# Naranjos por área)(Producción media de naranjas)
P(x)= x.z

Si x= 60 entonces z = 400
Si p= 61 entonces z= 396

$$m = \frac{400-396}{60-61} = -4$$

z - 400 = -4(x - 60) , entonces x = $-4x + 640$

(Producción media de naranjas)= 400 - 4(x-60)

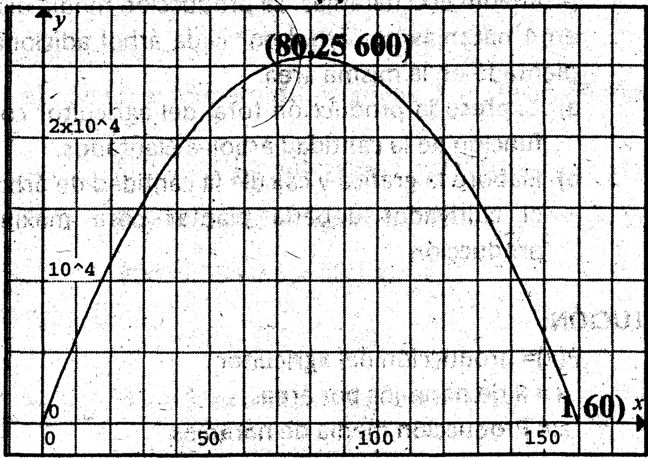
P(x) = x(640 - 4x)

La producción del agricultor es: **P(x) = 640x - 4x²**

P(x)= -4(x²-160x)= -4(x²-160x+6400)+4.6400
P(x)- 25600 = -4(x-80)²
Punto máximo = (80,25600)

80 árboles cultivará el agricultor para maximizar la producción en P=25600

Grafica de $P(x) = 640x - 4x^2$



18.- Los agricultores andinos pueden obtener 2 dólares por arroba de papas el primero de Julio y después el precio cae en 2 centavos por arroba cada día. El primero de Julio, un agricultor tiene 80 arrobas de papas en el campo y estima que la cosecha aumentará a la tasa de 1 arroba por día. Exprese los ingresos del agricultor obtenidos de la venta de papas como una función del tiempo en el que se recolecta la cosecha, dibuje la gráfica y estime cuando deberá recogerse las papas para maximizar los ingresos.

SOLUCIÓN:

x:= Nº de días a partir del 1º de julio.

z:= Producción de papas en arrobas.

P:= precio de una arroba de papa

El ingreso del agricultor es:

R(x)= (Producción)(Precio de venta)

R(x) = p.z.

Para determinar el precio de venta en función de x es:
Si x= 1 entonces p = 2 dólares.

Si x= 2 entonces p = 1.8 dólares.

$m = \frac{2-1.8}{1-2}$ de donde $m = -\frac{1}{5}$

$p - 2 = -\frac{1}{5}(x-1)$ entonces **$p = -\frac{1}{5}(x-7)$**

Para determinar la producción en función de x es:

Si x= 1 entonces z = 80 arrobas.

Si x= 2 entonces z = 81 arrobas.

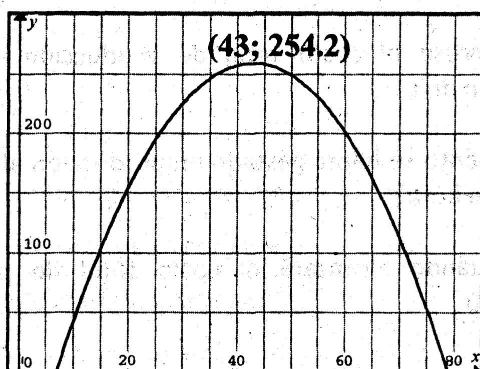
$m = \frac{80-81}{1-2}$ de donde $m = 1$

$z - 80 = 1(x-1)$ entonces **$z = x - 79$**

El ingreso del agricultor es:

R(x)= (Producción)(Precio de venta)

$R(x) = -\frac{1}{5}(x-79)(x-7)$



Se debe cosechar 43 días después del primero de Julio, es decir el agricultor debe recoger el 12 de agosto la cosecha para maximizar los ingreso en 254.2 dólares.

19.- Supongamos que el costo total, en dólares de fabricar **q** unidades de un determinado artículo está dado por la función $c(q)= q^3 - 30q^2 + 500q + 200$, calcular:

a) El costo de producir 10 unidades del artículo.

b) El costo de producir la décima unidad del artículo.

SOLUCIÓN:

a) $c(10)=?$

$$c(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$$
$$c(10)= 10^3 - 30.10^2 + 500.10 + 200$$
$$= 10^2(10-30+50+2)= 3200$$
$$c(10)= \$\ 3200$$

b) Costo de la décima unidad $= c(10) - c(9)$

$$= 3200 - 2990$$
$$= \$\ 210\ //$$

20.- En cierta industria el costo total de producción de **q** unidades durante el período diario de producción es $c(q)= q^2+q+900$ dólares. En un día normal de trabajo se fabrican $q(t)= 25t$ unidades durante las primeras t horas de un período de producción.

a) Exprese el costo total de producción como una función de t.

b) ¿Cuánto se habrá gastado en producción al final de la tercera hora?

c) ¿Cuándo alcanzará el costo total de producción $11000

SOLUCIÓN:

a) Exprese el costo total de producción como una función de t.

$$c(q) = q^2 + q + 900$$
$$q(t) = 25t$$
$$c(q) = c(25t) = (25t)^2 + 25t + 900$$
$$c(t) = 625t^2 + 25t + 900$$

b) ¿Cuánto se habrá gastado en producción al final de la tercera hora?

$$c(3) = 625.3^2 + 25.3 + 900$$
$$= 3.25(25.3+1+4.3) = 75(75+1+2)$$
$$c(3) = 6600.$$

c) ¿Cuándo alcanzará el costo total de producción \$11000

a) $11000 = 625t^2 + 25t + 900$

$$625t^2 + 25t - 10100 = 0$$
$$25t^2 + t - 404 = 0$$
$$(25t + 101)(t - 4) = 0$$
$$t = 4$$

21.- Un economista modela el mercado de trigo mediante las ecuaciones siguientes:

$$D: p = -q + 50$$
$$O: p = 2q + 20$$

Aquí p es el precio por kilogramo e dólares y q es la cantidad de kilogramos producidos y vendidos

a) No se produce trigo; precio = ?

$$O: p = 2q + 20$$
$$P = 2(0) + 20$$
$$\boxed{P = 20}$$

Rpta.: El Punto en el que el precio es tan bajo que no se produce es (0, 20)

b) No se vende trigo; precio = ?

D: p = -q + 50

P = -(0) + 50

$\boxed{P = 50}$

Rpta: El Punto seria (0, 50)

c) Hallando el Punto. de equilibrio

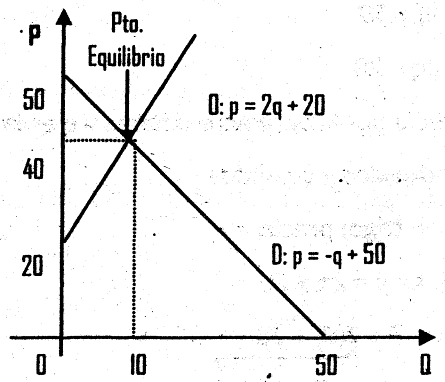
D: p = -q + 50 -q + 50 = 2q + 20

O: p = 2q + 20 3q 0 30

q = 10 ⇒ Cant. Equilibrio

⇒ p = -10 + 50 $\boxed{p = 40}$ ⇒ Precio Equilibrio

Rpta: El Punto. de Equilibrio es (10, 40)



22. En cierta industria el costo total de producción de q unidades durante el periodo diario de producción es $C(q) = q^2 + q + 900$ dólares. En un día normal de trabajo se fabrican $Q(t) = 25t$ unid durante las primeras t horas de un periodo de producción.

$$C(q) = q^2 + q + 900$$

$Q(t) = 25t$ unid durante las t primeras horas

a) Costo total $\Rightarrow$ en función de t.

Costo $\Rightarrow$ cantidad $\Rightarrow$ tiempo

C(q) q(t) t

C(q(t)) es la función costo total que depende de x

$$C(t) = Coq(t) = C(q(t)) = C(25t)$$

$$\Rightarrow \quad C(t) = (25t)^2 + 25t + 900$$

$$C(t) = 625t^2 + 25t + 900$$

b) Al final de la tercera hora:

$$C(3) = 625(3)^2 + 25(3) + 900$$

$$C(3) = 6{,}600$$

23.- Para animar a los automovilistas a establecer convenios para transportar pasajeros, las autoridades de tránsito en determinada área metropolitana ofrecieron una tarifa especial reducida en los peajes para los vehículos que llevaban cuatro o más personas. Cuando empezó el programa, hace 30 días, 157 vehículos calificaron para obtener la tarifa reducida durante las horas de mayor tráfico por las mañanas. Desde entonces, la cantidad de vehículos que califican han aumentado a una tasa constante y en la actualidad hay 247 vehículos autorizados.

a) Exprese la cantidad de vehículos que califican cada mañana para obtener la tarifa reducida como una función del tiempo y dibuje la grafica.

b) Si la tendencia continua, ¿Cuantos vehículos calificaran dentro de 14 días durante la hora de mayor tráfico por las mañanas?

Solución.

a)

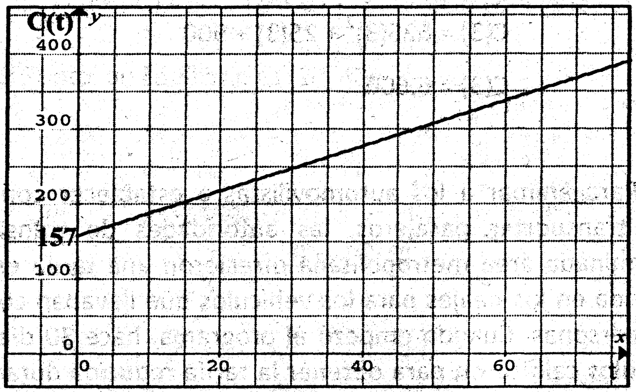
Vehículos	Tiempo		
157	0 ,	entonces	(0,157)
247	30 ,	entonces	(30,247)

$$m = \frac{247-157}{30-0} = 3$$

$C(t) - 247 = 3(t-30)$

$C(t) = 3t - 90 + 247$

$C(t) = 3t + 157$



b) Si $t = 14$ entonces
$C(14) = 3(14) + 157 = 199$

Se van a calificar 199 vehículos dentro de las 14 horas.

24.- Una manufacturera ha analizado sus ventas y ha descubierto que sus clientes compraran 20% más de unidades de sus productos con cada reducción de $ 2 en el precio unitario. Cuando el precio tiene un valor de $12, empresa vende 500 unidades. ¿Cuál es la ecuación de la función de la demanda correspondiente a este producto?, grafique la ecuación.

Solución

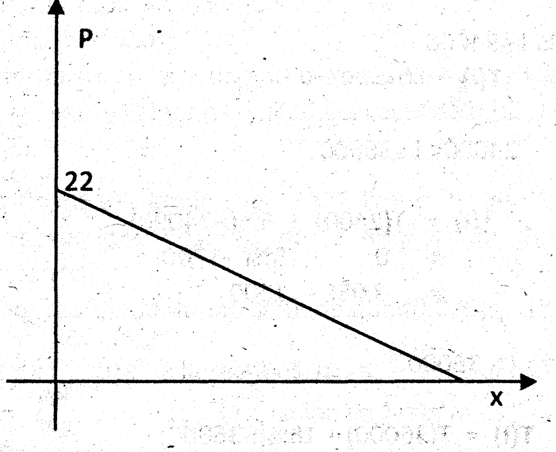
a)

Precio	**Unidades**
12 500	(500,12)
10 600	(600,10)

$$m = \frac{12-10}{500-600} = -\frac{1}{50}$$

$$\text{D:}\quad P - 10 = -\frac{1}{50}(x - 600)$$

$$P = -\frac{1}{50}x + 22$$



25.- El sistema de cobro de impuestos a la renta en el país por la SUNAT está determinada de la siguiente manera:
Los habitantes tiene ingresos gravables en sus primeros 24000 soles no pagaran impuestos.
Las tasas de impuestos para niveles de ingreso más alto se dan en la tabla.

Ingresos Gravables (nuevos soles)	Tasa de Impuesto (%)
$24000 < I \leq 36000$	5
$I > 36000$	18

Si denotamos con I los impuestos gravables y con T la cantidad gravada. Determinar:

a) T en función de I
b) Graficar

Solución

a) $0 \leq I \leq 24000$

$$T(I) = 0$$

ii) $24000 < I \leq 36000$

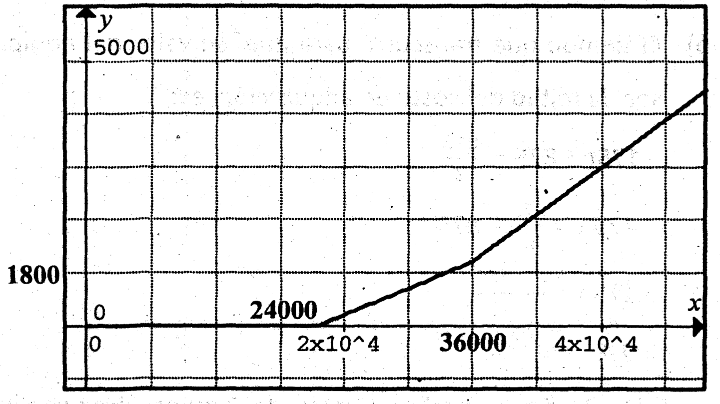
$$\begin{aligned} T(I) &= T(2400) + 5\%(I-24000) \\ &= 0 + 5\%I - 1200 \\ &= 0.05I - 1200 \end{aligned}$$

iii) $I > 36000$

$$\begin{aligned} T(I) &= T(36000) + 18\%(I-36000) \\ &= 0.05(36000) - 1200 + 18\%(I-36000) \\ &= 1800-1200+18\%I-6480 \\ &= 0.18I - 5880 \end{aligned}$$

La grafica de

$$T(I) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le I \le 24000 \\ 0.05I - 1200 & , \ 24000 < I \le 36000 \\ 0.18I\text{-}5880 & , \ I > 36000 \end{cases}$$



26.-Un pequeño comercio adquiere un equipo por 875 dólares. Tras 5 años quedará obsoleto y sin valor alguno.

a) Escribir una ecuación lineal para el valor del equipo durante esos 5 años y calcular el valor después de 2 años (tomar t en años).

b) Determinar en qué tiempo después de adquirir el equipo alcanzara su valor en la mitad del costo de adquisición

Solución

a) El Costo del equipo es \$875 como t es el # años transcurridos después de la adquisición del equipo entonces

(año ,costo) de donde se tiene que (0.875) y (5.0)

La pendiente de la recta es $m = \frac{0-875}{5-0} = -175$

m = -175, entonces la ecuación de la recta es:

y – 875 = -175 (x - 0)

y = -175x + 875

el costo después de dos años es:

C(2) = -175(2) + 875 entonces el costo del equipo después de dos años es de 525 dólares

b) El tiempo que transcurre para que su valor del equipo sea la mitad del costo de adquisición **es:**

$$-175t + 875 = \frac{875}{2}$$

$$-175\,t = \frac{875}{2} - 875$$

$$-175\,t = -\frac{875}{2}$$

$$t = 2{,}5$$

A los 2 años y medio el costo del equipo alcanzara la mitad de su valor.

27.- Una compañía de autobuses sabe que cuando el precio de un viaje de excursión de $ 5.00, treinta personas comprarán boletos; cuando el precio es de $ 8.00, sólo se venderá 10 boletos. Obtenga la forma de punto y pendiente de la ecuación que corresponde a la función de demanda y grafique dicha ecuación.

Solución.

Si P = S/.5 entonces x = 30 boletos (30,5)

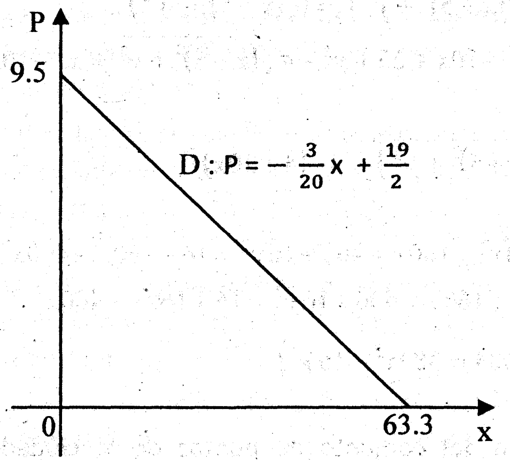
Si P = S/.8 entonces x = 10 boletos (10,8)

La pendiente de la recta es $m = \frac{5-8}{30-10} = -\frac{3}{20}$

La ecuación de la recta es: $P - 5 = -\frac{3}{20}(x - 30)$

$$P = -\frac{3}{20}x + \frac{19}{2}$$

La grafica de $P = -\frac{3}{20}x + \frac{19}{2}$ es:



28.- Supongamos que se da un sistema de coordenadas en una unidad de tal forma que hay un bar en (-5.0) y otro en (5.0), donde las unidades están dadas en Km. Un bocadillo cuesta 300 soles en el bar A, 275 en el bar B y el costo de transporte en la ciudad es de 30 soles por Km. Determinar:

a. Hallar la ecuación del conjunto de puntos de la ciudad tales que cueste lo mismo ir al bar A para comprar los bocadillos que ir al bar B. A esta curva se le suele llamar curva de inferencia.

b. Es esta ecuación una función.

Solución.

Los costos en los puntos A y B están dados por:

$$C_A = 330 + 30D_A \Rightarrow D_A\sqrt{(x+5)^2 + y^2} \quad C_A = 330 + 30\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

$$C_B = 270 + 30D_B \Rightarrow D_A\sqrt{(x+5)^2 + y^2} \quad C_B = 270 + 30\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

Como los costos en A y B so: $C_A = C_B$

$$330+30\sqrt{(x+5)^2+y^2} \;\; =270+30\sqrt{(x+5)^2+y^2}$$

$$\left(2+\sqrt{(x+5)^2+y^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x+5)^2+y^2}\right)^2$$

$$4+x^2+10x+25+y^2+4\sqrt{(x+5)^2+y^2}=x^2-10x+25+y^2$$

$$\left(4\sqrt{(x+5)^2+y^2}\right)^2=(-(4+20x))^2$$

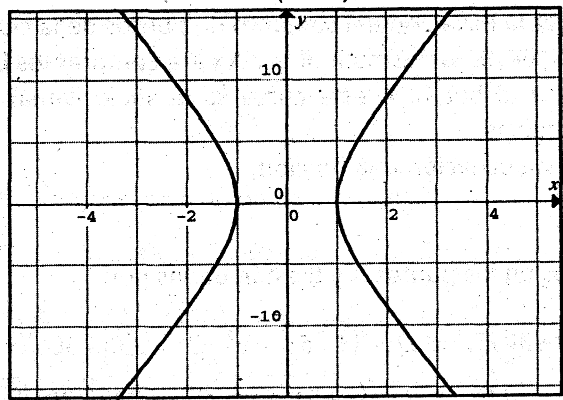
$$\Rightarrow 16\left(x^2+160x+400+16y^2=16+160x-400x^2\right)$$

$$16x^2+160x+400+16y^2=16+160x-400x^2$$

$$\frac{1}{384}\left(384=384x^2-16y^2\right)$$

La ecuación del conjunto de puntos de la ciudad tales que cueste lo mismo ir al bar A para comprar los bocadillos que ir al bar B. A esta dada por la Hipérbola:

$$H:\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{24}\right)^2}=1$$



c) La ecuación determinada es una hipérbola lo cual no es una función.

IV. EJERCICIOS

I Modelos lineales

1.-Suponga que un fabricante de calculadoras tiene la función de costo total $C(x)=17x + 3\ 400$ y la función de ingreso total $R(x) =34x$.

a) ¿Cuales la ecuación de la función de ganancia para las calculadoras?

b) ¿Cuál es la ganancia de 300 unidades'.

2.- Suponga que un fabricante de receptores de estéreo tiene la función de costo total $C(x) = 105x + 1650$ y la función de ingreso total $R(x) =215x$.

a) ¿Cuál es la ecuación de la función de ganancia para esta mercancía?

b) ¿Cuál es la ganancia de 50 unidades?

3.- Suponga que un fabricante de radios tiene la función de costo total $C(x)= 43x + 1850$ y la función de ingreso total $R(x) = 80x$.

a) ¿Cuál es la ecuación de la función de ganancia para esta mercancía?

b) ¿Cuál es la ganancia de 30 unidades? Interprete su resultado.

c) ¿Cuántos radios se deben vender para evitar perder dinero?

4.- Suponga que un fabricante de computadoras tiene la función de costo total $C(x) = 85x + 3\ 300$ y la función de ingreso total $R(x) = 385x$.

a) ¿Cuál es la ecuación de la función de ganancia para esta mercancía?

b) ¿Cuales la ganancia de 351 unidades?

c) ¿Cuántas unidades se deben vender para evitar perder dinero?

5.- Una función de costo lineal es $C(x)=5x+250$.

a) ¿Cuál es la pendiente y el intercepto de C?
b) ¿Cuál es el costo marginal y qué significa?
c) ¿Cómo se relacionen sus respuestas de u) y b)?
d) ¿Cuál es el costo de producir *un articulo mas* si actualmente se producen 50 unidades? ¿Cuál es si actualmente se producen 100 unidades?

6.-una compañía que grafica sus ganancias se da cuenta de que la relación entre el número de unidades vendidas, x, y la ganancia, u, es lineal. Si la venta de 200 unidades da una ganancia de \$3 100 y la venta de 250 unidades proporciona una ganancia de \$6000, escriba la función de ganancia para esta compañía.

7.- Un fabricante, fabrica cascos para esquíes. Los costos fijos de un modelo de casco son \$6600 por mes. Los materiales y el trabajo para cada casco de este modelo cuestan \$35 y a compañía vende este casco a los distribuidores en \$60 cada uno.

a) Escriba la función de costos totales mensuales de este casco.
b) Escriba la función de ingreso total.
c) Escriba la función de ganancia.
d) Encuentre C(200), R(200) y U(200) e intérprete cada respuesta.
e) Encuentre C(300), C(300) y U(300) e intérprete cada respuesta.

8.- Un fabricante de reproductores de DVD tiene costos mensuales fijos de \$9 800 y costos variables de \$65 por unidad de un modelo particular. La compañía vende este modelo en \$100 cada uno.

a) Escriba la función de costos totales mensuales de este modelo de reproductor de DVD.

b) Escriba la función de ingreso total.
c) Escriba la función de ganancia.
d) Encuentre C(250), R(250) y *U(250) e* intérprete cada respuesta.

9.- El costo total para un fabricante consta de costos indirectos fijos de $ 5 000 más costos de producción de $ 60 por unidad. Exprese el costo total como una función de la cantidad de unidades producidas y elabore la gráfica.

10.- La afiliación a un club de natación cuesta $ 150 por las 12 semanas de la temporada de verano. Si un miembro se afilia después del inicio de la temporada, la cuota se prorratea; es decir, se reduce de manera lineal .

a) Exprese la cuota de afiliación como una función de la cantidad de semanas que han transcurrido hasta el momento en que se paga la afiliación y elabore la gráfica.
b) Calcule el costo de una afiliación que se paga 5 semanas después del comienzo de la temporada

11.- Un médico posee libros de medicina que valen $1 500. Para efectos tributarios, se supone que se desprecian de modo lineal hasta llegar a cero en un período de 10 años. Es decir, el valor de los libros disminuye a una tasa constante , de manera que es igual a cero al cabo de 10 de años. Exprese el valor de los libros como una función del tiempo y elabore la gráfica.

12.- Un fabricante compra maquinaria por un valor de $ 20 000. Ésta se desprecia linealmente, de manera que después de 10 años su valor comercial será $ 1 000.

a) Exprese el valor de la maquinaria como una función de antigüedad y dibuje la gráfica.
b) Calcule el valor de la maquinaria después de 4 años.

13.- Desde el principio del mes, una represa local ha perdido agua a una tasa constante. El día 12, la represa tenía 200 millones de galones de agua; el 21 164 millones.

a) Exprese la cantidad de agua en la represa como una función del tiempo y elabore la gráfica.

b) El día 8 ¿Cuánta agua había en la represa?

14.- Para animar a los automovilistas a establecer convenios para transportar pasajeros, las autoridades de tránsito en determinada área metropolitana ofrecieron una tarifa especial reducida en los peajes para los vehículos que llevaban cuatro o más personas. Cuando empezó el programa, hace 30 días, 157 vehículos calificaron para obtener la tarifa reducida durante las horas de mayor tráfico por las mañanas. Desde entonces, la cantidad de vehículos que califican han aumentado a una tasa constante y en la actualidad hay 247 vehículos autorizados.

a) Exprese la cantidad de vehículos que califican cada mañana para obtener la tarifa reducida como una función del tiempo y dibuje la gráfica.

b) Si la tendencia continúa, ¿Cuántos vehículos calificarán dentro de 14 días durante la hora de mayor tráfico por las mañanas?

15.- Un pequeño comercio adquiere un equipo por 875 dólares. Tras 5 años quedará obsoleto y sin valor alguno. Escribir una ecuación lineal para el valor del equipo durante esos 5 años (tomar t en años).

a) ¿Cuál es el valor del equipo después de 2 años?

b) ¿Cuándo el valor del equipo se reduce a la mitad?

16.- El valor de cierto libro raro se duplica cada 10 años. En principio, el libro se valoró en $3.

a) ¿Cuál es el valor del libro a los 30 años?, ¿a los 40 años?

b) ¿Es lineal la relación entre el valor del libro y su edad? Fundamente su respuesta.

17.- Un fabricante puede producir radios a \$ 2 por unidad. Los radios se venden a \$ 5 por unidad y a este precio los consumidores han comprado 4 000 radios al mes. El fabricante planea incrementar el precio de los radios y estima que por cada aumento de \$ 1 en el precio, se venderán 400 radios menos cada mes. Exprese la cantidad de radios vendidos como una función del precio de venta del fabricante. (Nota: La cantidad de radios vendidos Y es una función lineal del precio de venta X y su gráfica pasa a través del punto (5 , 4 000) . ¿Cuál es pendiente?).

18.- Un minorista puede comprar cámaras a un fabricante a un costo de \$ 50 por unidad. El minorista vende las cámaras a \$ 80 por unidad, y a este precio los consumidores han comprado 40 cámaras al mes. El minorista planea reducir el precio para estimular las ventas y calcula que por cada reducción de \$ 1 en el precio, se venderán 2 cámaras más. Exprese la cantidad de cámaras vendidas como una función del precio de venta.

19.- Dado: $R = 15q$ (INGRESO TOTAL) y
$C = 10q + 30$ (COSTE TOTAL)

a) Grafique la ecuación de ingreso total y la de coste total.
b) Hallar el punto de equilibrio y explique su significado (para qué valores de q existe ganancia y para qué valores de q existe pérdida).
c) La ecuación de beneficio o ganancia se define del siguiente modo: $U = R - C$. Halle la ecuación del beneficio. ¿ Qué ocurre si $U = 0$? .
d) Graficar la ecuación del beneficio.

20.-Una distribuidora de azúcar fija el precio a 50 soles por quintal de azúcar, la demanda de azúcar es de 4500 quintales, mientras que la oferta es de 3300 quintales. Si el precio se incrementa a 10 soles por quintal, la demanda y la oferta serán de 4400 y 4200 quintales respectivamente.

a) Suponiendo linealidad en sus ecuaciones determinar la ecuación de la oferta y de la demanda.

b) Determinar el precio y la cantidad de equilibrio.

c) Si se graba un impuesto adicional de 2 soles por quintal de azúcar al proveedor, determinar el precio y la cantidad de equilibrio.

d) Grafique en un solo sistema de coordenadas la ecuación de la oferta y demanda determinada en a).

21.- Un fabricante compra maquinaria por un valor de \$20000. Esta se deprecia linealmente, de manera que después de 10 años su valor comercial será \$1000.

a) Exprese el valor de la maquinaria como una función de su antigüedad y dibuje la gráfica.

b) Calcule el valor de la maquinaria después de 4 años.

22.- Un fabricante puede vender cierto producto a \$110 la unidad. El costo total está formado por costos indirectos fijos de \$7,500 más costos de producción de \$60 por unidad.

a) ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para alcanzar el punto de equilibrio?

b) ¿Cuál es la utilidad o la pérdida del fabricante si se venden 100 unidades?

c) ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para obtener una utilidad de \$1,250?

23.- Una determinada agencia de alquiler de automóviles cobra \$25 más 60 centavos por kilómetro. Una segunda agencia cobra \$30 más 50 centavos por kilómetro. ¿Qué agencia ofrece el mejor trato?.

24.- Una empresa abona a sus agentes de ventas 900 soles por alojamiento y alimentación, más 2 soles por cada kilómetro de viaje en coche. Escribir una ecuación lineal que representa el costo diario C en términos del número de kilómetros de viaje.

25.- Una fábrica paga a sus trabajadores 90 soles la hora más un plus de 7,5 soles por cada unidad producida. Hallar una ecuación lineal para el salario por hora trabajada en términos de la variable x que es el número unidades producidas por hora.

26.- Un pequeño comercio adquiere un equipo por 875 dólares. El equipo tras 5 años, quedará obsoleto y sin valor alguno. Escribir una ecuación lineal de la desvalorización el valor del equipo durante esos 5 años. (t en años).

27.- Una empresa construye un almacén por 825000 soles. Tendrá una vida útil estimada en 25 años después de los cuales se espera que su valor sea de 75000 soles. Escribir una ecuación lineal para el valor del almacén durante esos 25 años de vida útil.

28.- El número de abonados a una emisora de televisión por cable era en 1990 de 16 millones y en 1996 de 37,5 millones. Determinar:

a) La ecuación para este caso, sabiendo que en 1990 t=0.
b) En el 2002 el número de abonados será?
c) ¿Qué información encierra la pendiente de la ecuación en este caso?

29.- Los agentes comerciales de una empresa están obligados a usar sus propios vehículos. El costo para la empresa es de 150 dólares diarios de dieta de alojamiento más 0.30 dólares por cada kilómetro recorrido en el coche. Expresar en una ecuación lineal el costo diario C en términos de la variable x de kilómetros recorridos.

II MODELOS FUNCIONALES NO LINEALES

1.-Un estudio de eficiencia del turno matinal en cierta fábrica revela que un trabajador medio que llega a las 8.00 a.m. habrá ensamblado $f(x)= -x^3 + 6x^2 + 15x$ radios transistores x horas después, determinar:

a) ¿Cuántos radios habrá ensamblado el trabajador a las 10.00 a.m.(a las 10.00 a.m., x=2)?

b) ¿Cuántos radios ensamblará entre las 9.00 y las 10.00 a.m.?

2.-Un fabricante vende lámparas a 6 dólares cada una y a este precio los consumidores han comprado 5000 lámparas por mes. El fabricante desea aumentar el precio y estima que por cada incremento de un dólar en el precio, se venderán 100 lámparas menos cada mes. Las lámparas pueden producirse a un costo de 4 dólares cada una.

a) Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio al que se venden las lámparas.

b) Grafique y calcule el precio óptimo de venta.

3.-Los agricultores andinos pueden obtener 2 dólares por arroba e papas el primero de Julio y después el precio cae en 2 centavos por arroba cada día. El primero de Julio, un agricultor tiene 80 arrobas de papas en el campo y estima que la cosecha aumentará a la tasa de 1 arroba por día.

a) Exprese los ingresos del agricultor obtenidos de la venta de papas como una función del tiempo en el que se recolecta la cosecha.

b) dibuje la gráfica

c) Estime cuando deberá recogerse las papas para maximizar los ingresos.

4.-En cierta industria el costo total de producción de q unidades durante el periodo diario de producción es $(q)= q^2 + q + 900$ dólares. En un día normal de trabajo se fabrican $q(t)=25t$ unidades durante las primeras t horas de un periodo de producción.

a) Exprese el costo total de producción como una función de t.
b) ¿Cuánto se habrá gastado en producción al final de la tercera hora?
¿Cuánto alcanzará el costo total de producción $11,000?

5.-En cierto país, el impuesto sobre la renta se evalúa como se indica a continuación. No se paga impuesto sobre ingresos hasta 10 000 soles. Cualquier ingreso superior a 10 000 soles paga un impuesto de 10% del mismo, hasta un ingreso de 20 000 soles. Cualquier ingreso superior a 20 000 soles paga impuesto con una tasa de 15%.
   a) Determine el impuesto total correspondiente T como una función del ingreso total I y trace su grafica.
   b) ¿Cuál impuesto corresponde a un ingreso de 14 000 soles y otro de 26 000 soles?

6.-El sistema de cobro de impuestos a la renta en el país por la Superintendencia Nacional de Administración Tributaria (SUNAT) está determinada de la siguiente manera:
Los habitantes que tienen ingresos gravables en sus primeros 32000 nuevos soles no pagarán impuestos.
Las tasas de impuestos para niveles de ingreso más alto se dan en la tabla.

INGRESOS GRABABLES (SOLES)	TASA DE IMPUESTO (%)
$32000 < I \leq 56000$	19
$I > 56000$	21

Si denotamos con I los ingresos gravables y con T la cantidad gravada. Determinar:
a) T en función de I.
b) Graficar.

7.- Supongamos que se da un sistema de coordenadas en una ciudad de tal forma que hay un bar en (-5,0) y otro en (5,0), donde las unidades están dadas en Km. Un bocadillo cuesta 300 soles en el bar A, 275 en el bar B y el costo de transporte en la ciudad es de 30 soles por Km. Determinar:

a.- Hallar la ecuación del conjunto puntos de la ciudad tales que cueste lo mismo ir al bar A para comprar los bocadillo que ir al bar B.

b.- es esta ecuación una función.

c.- graficar la ecuación de la curva determinada en la parte a).

8.- Supongamos que el costo total en dólares de la fabricación de **q** unidades de un determinado artículo está dado por la función $c(q)=q^3 - 30q^2 + 400q + 500$, calcular:

c) El costo de fabricación de 20 unidades.

d) El costo de fabricación de la vigésima unidad.

9.- Un depósito para agua, de cuatro metros de altura, está formado por un cilindro y un cono unidos por sus bases, con el vértice del cono en la parte más baja del depósito. El cilindro tiene 2 metros de altura y la base común del cilindro y el cono tiene 2 metros de diámetro.

Hallar la expresión algebraica de la función que da el volumen de agua contenida en el depósito como función de la altura del nivel del agua.

10.- Determine el precio de equilibrio y la cantidad correspondiente, de unidades ofertadas y demandadas, si la función de oferta para un determinado artículo es $S(p)=p^2 + 3p - 70$, y la función e demanda es $D(p) = 410 - p$.

11.- En cierta industria el costo total de producción de q unidades durante el periodo diario de producción es $c(q)= q^2 + q + 900$ dólares. En un día normal de trabajo se fabrican $q(t)=25t$ unidades durante las primeras t horas de un periodo de producción.

a) Exprese el costo total de producción como una función de t.

b) ¿Cuánto se habrá gastado en producción al final de la tercera hora?

c) ¿Cuánto alcanzará el costo total de producción $11,000?

12.- Supongamos que el costo total, en dólares de fabricar q unidades de un determinado artículo, está dado por la función $c(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$. Calcular:

a) El costo de producir 10 unidades de artículo.

b) El costo de producir la décima unidad del artículo.

13.- Una agencia inmobiliaria dispone de un edificio con 50 departamentos. Cuando el alquiler es 380 dólares mensuales, los 50 están ocupados, pero con un alquiler de 425 dólares, la media de ocupación baja a 47. Supongamos que la relación entre el precio P del alquiler y la demanda X es lineal. Determinar:

a) Una ecuación lineal que describa x en términos de P. (X=f(p)).

b) El número de departamentos que estarán ocupados si se establece un alquiler de 455 dólares.

d) Predecir el número de departamentos ocupados con un alquiler de 395 dólares.

14.- Un fabricante puede producir radios a un costo de 2 dólares por unidad. Los radios se venden a 5 dólares cada uno y a este precio los consumidores han comprado 4000 radios al mes. El fabricante planea aumentar el precio de los radios y estima que por cada incremento de un dólar en el precio, se venderán 400 radios menos cada mes.

a) Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio al que se venden los radios.

b) Determinar la gráfica y a partir de ello el precio de cada radio que maximiza la utilidad además la utilidad máxima.

15.- Cada unidad de un determinado artículo cuesta $P=4x+40x^{-1}-24$ soles cuando se producen x unidades. Si todas las x unidades se venden a este precio.

a) Exprese los ingresos obtenidos de las ventas como una función de x.

b) Graficar la función obtenida en a) y determinar el ingreso mínimo.

16.- Un importador de café estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $Q(P)=(4374)/P^2$ kilogramos de café a la semana cuando el precio sea P dólares por kilogramo. Se estima que dentro de t semanas el precio será $P(t) = 0.04t^2 + 0.2t + 12$ dólares por kilogramo.

a) Expresar la demanda de consumo semanal de café como una función de t.

b) Dentro de 10 semanas ¿cuántos kilogramos de café comprarán los consumidores al importador?

c) ¿Cuándo alcanzará la demanda de café 30.37 kilogramos?

17.- Un fabricante vende lámparas a 6 dólares cada una y a este precio los consumidores han comprado 3000 lámparas por mes.

El fabricante desea aumentar el precio y estima que por cada incremento de un dólar en el precio, se venderán 1000 lámparas menos cada mes. Las lámparas pueden producirse a un costo de 4 dólares cada una.

a. Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio al que se venden las lámparas.

b. Grafique y calcule el precio óptimo de venta.

18.- Una compañía de autobuses ha adoptado la siguiente política de fijación de precios, para grupos que desean alquilar los vehículos. A grupos formados por no más de 40 personas se les cobrará una cantidad fija de 2400 dólares. Para grupos conformados entre 40 y 80 personas, cada una pagará 60 dólares, menos 50 centavos de dólar. Por cada persona adicional a 40. La tarifa más baja de la compañía es 40 dólares por persona que se ofrece a grupos de 80 personas o más.

a) Exprese los ingresos de la compañía de autobuses como una función del tamaño del grupo.
b) Elabore la gráfica.

19.-Un agricultor de frutas cítricas de Quillabamba estima que si se plantan 60 naranjos cada árbol producirá en promedio 400 unidades de naranjas. La producción media disminuirá en 4 naranjas por árbol, por cada árbol adicionalmente plantado en la misma área de cultivo.

a) Exprese la producción total del agricultor como una función de la cantidad de árboles plantados.
b) elabore la gráfica y calcule la cantidad de árboles que el agricultor debería plantar para maximizar la producción.

CAPÍTULO 3

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Definición.
Sea f y g funciones reales con $Dom(f) \cap Dom(g) \neq \phi$ entonces se define

3.1. IGUALDAD DE FUNCIONES.
Dos funciones f y g son iguales si i solo si se cumple lo siguiente:

i) $Dom(f) = Dom(g)$

ii) $f(x) = g(x)$

3.2. FUNCIÓN SUMA

$$f + g = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y = f(x) + g(x),\ x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$$

3.3. FUNCIÓN DIFERENCIA.

$$f - g = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y = f(x) - g(x),\ x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$$

3.4. *FUNCIÓN PRODUCTO.*

$$f.g = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y = f(x) .g(x),\ x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$$

3.5. *FUNCIÓN COCIENTE*

$$\frac{f}{g} = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0,\ x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$$

Ejemplo.

1.- Sea las funciones definidas por:

$$f = \{(1,4), (2,5), (3,6), (4,-6), (5,-5)\}$$

$$g = \{(0,8), (1,3), (2,0), (3,7), (4,0), (5,10)\}$$

Determinar:

i) f+g ii) f^2-g iii) f/g

Solución.

$$Dom(f) \cap Dom(g) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

i) $f + g = \{(1,7), (2,5), (3,13), (4,-6), (5,5)\}$

ii) $f^2 - g = \{(1,19), (2,25), (3,43), (4,36), (5,35)\}$

iii) $f/g = \{(1,4/3), (3, 6/7), (5,-1/2)\}$

2.- Sean las funciones definidas por.

$$g(x) = \sqrt{x}, \; x \in [1,4].$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \; x \in [0.2] \\ 3 & , \; x \in [3,5] \end{cases}$$

Calcular.

i) f+g ii) fg iii) f/g

Solución.

$$Dom(f) \cap Dom(g) = [1,2] \cup [3,4].$$

i)

$$(f+g)(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2x - 1 & , \; 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{x} + 3 & , \; 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

ii)

$$(f.g)(x) = \begin{cases} (2x-1)\sqrt{x} & , \quad 1 \le x \le 2 \\ 3\sqrt{x} & , \quad 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

iii)

$$(f/g)(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}} & , \quad 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}} & , \quad 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

3.6. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

DEFINICIÓN.- Sea las funciones definidas por: $f : A \to B$, y
$g : B \to C$, tales que $Rang(f) \cap Dom(g) \neq \phi$

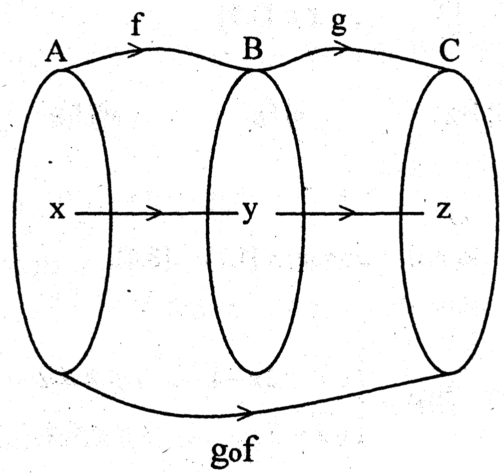
La función g, compuesta con la función f, denotado por gof, es aquella función definida por:

$$gof = \{(x,y)/\ y = g(f(x)),\ x \in Dom(f)\},$$

donde:

$$Dom(gof) = \{x \in R / x \in Dom\ f,\ f(x) \in Dom\ g\}$$

$y = f(x)$
$z = g(y)$
$z = g(f(x))$



Propiedades.
Consideremos las siguientes funciones f, g ,h y I.

1.- Asociativa.

$$(fog)oh = fo(goh)$$

2.- No es conmutativa.

$$fog \neq gof$$

3.- Distributiva.

$$(f+g)oh = foh + goh$$
$$fo(g+h) = fog + foh$$

4.-La función I es la identidad.

$$foI = Iof = f$$

Ejemplo1.
Sea las funciones definidas por:

$$f = \{(-2,0),(-1,-4),(3,1),(5,1)\}$$

$$g = \{(-2,-1),(0,3),(1,4),(2,0),(4,5)\}$$

Determinar.

i) $f+g$ ii) $2f-g$ iii) f/g iv) f^2+2g^3 v) fog vi) gof
vii) foI viii) Iog

Solución.

$Dom(f) = \{-2,-1,3,5\}$ y $Dom(g) = \{-2,0,1,2,4\}$
$Dom(f) \cap Dom(g) = \{-2\}$
i) $f+g = \{(-2,0+(-1)\} = \{(-2,-1)\}$
ii) $2f-g$ $\{(-2,2(0)-(-1)\} = \{(-2,1)\}$
iii) $f/g = \{(-2,0/(-1)\} = \{(-2,0)\}$
iv) $f^2+2g^3 = f+g = \{(-2,(0)^2+(-1)^3\} = \{(-2,-1)\}$
v) $fog = \{(-2,3),(3,4),(5,4)\}$
vi) $gof = \{(0,1),(4,1)\}$
vii) $foI= \{(-2,0),(-1,-4),(3,1),(5,1)\} = f$

Ejemplo2
Sean las funciones reales definidas por

$$f(x) = x - 1 \;,\; 1 \leq x \leq 4 \;\; y \;\; g(x) = \sqrt{x-2}.$$

Determinar:
i) fog   ii) gof

Solución.
i) para determinar fog, se debe evaluar que Rang(g)$\cap$Dom(f) $\neq \phi$
Rang(g) = [0, +∞[y Dom(f) = [1,4] entonces
Rang(g) $\cap$ Dom(f) = [1,4] $\neq \phi$, existe fog.

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2}\,) = \sqrt{x-2} - 1$$

$$fog(x) = \sqrt{x-2} - 1$$

Para determinar el dominio de fog se tiene:
$x > 2 \wedge \sqrt{x-2} \in [1,4]$ entonces [2, +∞[$\cap$ [3, 18] = [3, 18]
La función f compuesta con g es:

$$\mathbf{fog(x) = \sqrt{x-2} - 1,\;\; 3 \leq x \leq 18}$$

ii) Para determinar gof, se debe evaluar que Rang(f)$\cap$Dom(g) $\neq \phi$
Rang(f) = [0,3] y Dom(g) = [2, +∞[entonces
Rang(f) $\cap$ Dom(g) = [2,3] $\neq \phi$, existe fog.

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x-1) = \sqrt{(x-1)-2}$$

$$gof(x) = \sqrt{x-3}$$

Para determinar el dominio de fog se tiene:
$1 \leq x \leq 4 \wedge (x-1) \in [2, +\infty[$ entonces [1,4] $\cap$ [3, +∞[= [3,4]
La función f compuesta con g es:

$$\mathbf{gof(x) = \sqrt{x-3} \quad 3 \leq x \leq 4}$$

3.7. TIPOS DE FUNCIONES

3.7.1. FUNCIÓN INYECTIVA O UNIVALENTE (uno-uno)

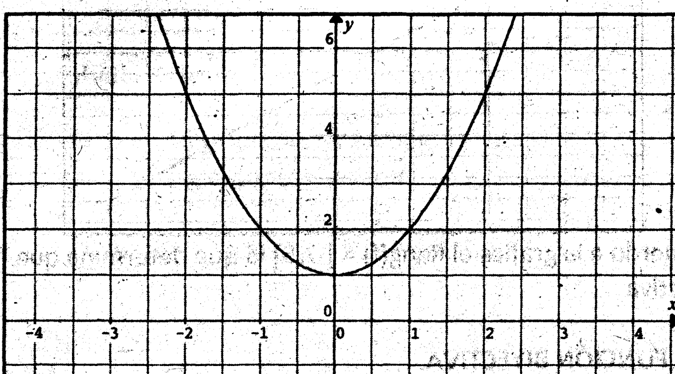
Definición. Una función $f : A \to B$, es ***inyectiva*** si cada elemento del dominio de f le corresponde un solo elemento del rango de f. i.e.

f en una función inyectiva si i solo si
$f(a) = f(b)$ entonces $a=b$, $a,b \in A$

Se puede definir también de la siguiente manera:
f en una función inyectiva si i solo si $a \neq b$ entonces
$f(a) \neq f(b)$ con, $a,b \in A$

Propiedad.
Una función f es inyectiva, si la grafica de toda recta horizontal intercepta a la grafica de la función f en un solo punto.

Ejemplo.
Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, y = x^2 + 1$. ¿f es una función inyectiva?
Solución.
Como $f(a) = f(b)$ entonces $a^2 + 1 = b^2 + 1$ de donde se tiene que $a = b \ \vee \ a = -b$ lo que implica que f no es una función inyectiva.



La grafica de la recta $y = 2$ interseca en dos puntos a la grafica de $f(x) = x^2 + 1$, lo que determina que f no es una función inyectiva.

3.7.2. FUNCIÓN SURYECTIVA.

Definición. Una función $f: A \rightarrow B$, es ***suryectiva*** si todo elemento b de B es imagen de algún elemento a de A.
i.e.

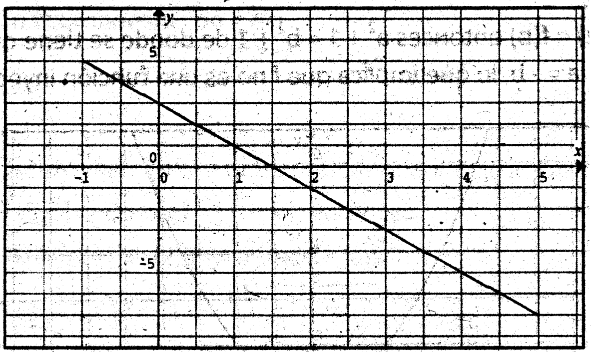
$$f \text{ es suryectiva si i solo si } \forall b \in B\ \exists a \in A / b = f(a)$$

Propiedad.

*Una función $f: A \rightarrow B$ en suryectiva si i solo si el **Rang(f) =B***

Ejemplo.
Sea la función $f: [-1,5[\rightarrow]-7,5] / f(x) = 3-2x$.
¿ f es una función suryectiva?

Solución.
Sabemos que el dominio de f es $[-1,5[$ de donde se tiene que $-1 \leq x < 5$, entonces $-7 < 3-2x \leq 5$ por consiguiente el $Rang(f) =]-7,5]$ lo que implica que f es suryectiva



De acuerdo a la grafica el $Rang(f) =]-7,5]$ lo que determina que f es suryectiva

3.7.3. FUNCIÓN BIYECTIVA.

Definición.- Un función $f: A \rightarrow B$ es ***biyectiva*** si i solo si ***f es inyectiva y suryectiva*** a la vez

3.8. FUNCIÓN INVERSA.

Definición.- sea $f : A \rightarrow B /\ y = f(x)$ una ***función inyectiva***. La función inversa de f denotado por f^{-1} o f^* es la función definida por $f^{-1}: B \rightarrow A /\ x = f^{-1}(y) \longleftrightarrow y = f(x)$.

Donde:

$$Dom(f) = Rang(f^{-1})$$
$$Rang(f) = Dom(f^{-1}).$$

Propiedades.

Consideremos las siguientes funciones inyectivas f, g ,h y I, entonces se cumple lo siguiente:

1.- De la figura se tiene:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "I_A"'] & B \arrow[d, "f^{-1}"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[dr, "I_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$$f^{-1} o f = I_A \qquad\qquad f o f^{-1} = I_B$$

2.-. $(fog)^{-1} = g^{-1}of$

3.- Si $h = f o g^{-1}$ entonces $f = hog$
$h = f^{-1} o g$ entonces $g = foh$

4.- La función $f o g$ ó $g o f$ es inyectiva.

Ejemplo.

1.- Si la función f está definido por $f = \{(1,3),(2,5),(4,7),(3,8)\}$. Determinar f^{-1}

Solución.

Se observa que $f = \{(1,3),(2,5),(4,7),(3,8)\}$. es una función inyectiva puesto que el segundo componente de cada elemento de f no se repite de donde se tiene que existe f^{1} como:

$$f^{1} = \{(3,1),(5,2),(7,4),(8,3)\}.$$

El cual se obtiene intercambiando los componentes de cada elemento de la función f.

2.- Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, y = 2x+3,\ \forall x \in [-2, 1[$.

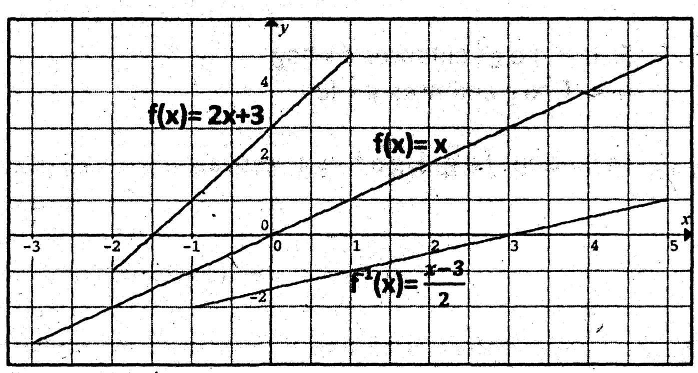
Determinar f^{-1} si existe y realizar la grafica de f, f^{-1} e I en un solo sistema de ejes coordenados.

Solución.

La función f es inyectiva puesto que toda función lineal es siempre inyectiva entonces existe f^{1}que está definida por:

$$f^{1}(x) = \frac{x-3}{2}\ ,\ x \in [-1, 5[$$

La grafica de las funciones f, f^{-1} y la función identidad es:



2.- Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = f(x)$

donde

$$f(x) = \frac{(x+2)(2x^2-7x+6)(x-1)}{(x-2)(x^2+x-2)}$$

b) Determinar f^{-1} si existe

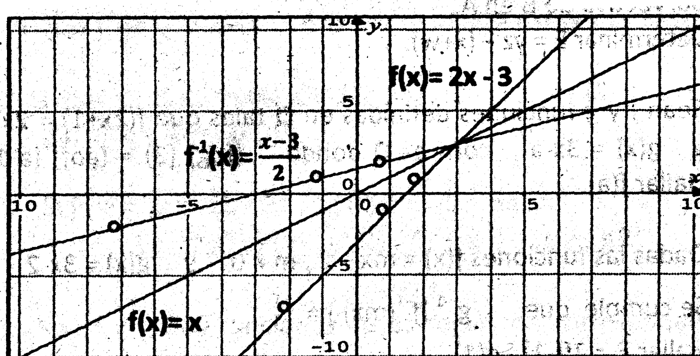
c) Graficar la función f; si f^{-1} existe realizar la grafica de f y f^{-1} en un solo sistema de ejes coordenados.

Solución.

La función f al simplificar $f(x) = \dfrac{(x+2)(2x-3)(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x-1)}$

es equivalente a $f(x) = 2x-3$, $x\neq 2$, $x\neq -2$, $x\neq 1$ de donde f es una función inyectiva entonces existe f^{-1} que está definido por

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}, \quad x \in R - \{-7,-1,1\}$$



V. EJERCICIOS

I. OPERACIONES CON FUNCIONES

1. Dadas las funciones:
   f = { (-4,0), (-2,- 4), (3, 1), (5,2) (-3, 1), (4,2) }
   g = { (-2,-1), (0,3), (1, 4), (2, 0), (4, 5)}
   Determinar: 3f+g ; $2f-g^2$; f·g ; f o g y g o f.

2. Sean los conjuntos: A= {-1, 0, 2, 3 } , B= {-1, 0, 3, 7} y la función f(x) = 2x-1 ·
   Hallar f (A) y f (B)

3. Sean: A= {1, 2, 3} ; B= {1,2,3,4 } ; Si
   f = { (3,1) , (x,3), (2,3)} es una función de A en B ;
   g = { (3,1), (y,z), (1,3) } es una función inyectiva definida en A ; h = {(1,1) , (2,w) , (3,2) , (4,2)} es una función suryectiva de B en A.
   Determinar E = yz – (x+w).

4. Sean f y g funciones definidas en Q tales que f(2x+1) = 2x-1 y g(x) = 3x-a , con a∈Q donde (fog) (3) = (gof) (a-1).
   Hallar f(a)

5. Dadas las funciones f(x) = mx + 2 , m ≠ 0 y g(x) = 3x-2
   Se cumple que $g^{-1}[f^{-1}(mx)] = \frac{x}{3}$
   Hallar E = 2f(-1) - g(1)

6. Sean las funciones f , g y h definidas en Q todas biyectivas si $f(x) = \frac{x}{2} - 1$,
   g(x) = ax y h(x) = 2x + a , $\forall a \in R$ tal que
   (f o g o h) (x+1) = 2x+3.
   Hallar (h o g) (-1)

7. Si $f(x) = \begin{cases} 3x+4 & , x\in [0,2] \\ 1-x & , x\in]\,2,5\,[\end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in [0,3\,[\\ 4 & , x \in [3,6] \end{cases}$

Hallar f +g ; gof ; fog y construir su gráfica para cada caso.

8. Sea $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ y $g(x) = 2-|x-1|$, $x \in]-2,5\,[$.
Hallar f + g

9. Dada la función $f:]-3.5\,[\to \mathbb{R}$ definido por $f(x)= \dfrac{1-x}{2}$
determinar la regla de correspondencia de la función g definida por $g(x) = f(1-2x)$

10. Sean las funciones $f(x)= 1-|x+1|$ y

$$g(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad x<1 \\ x+1 & , \quad x>1 \end{cases}$$

Hallar f +g ; gof ; fog y construir su gráfica para cada caso.

11.- Si $f(x)= x^2$, determinar dos funciones para los cuales
$(f \circ g)(x) = 4x^2-12x+g$

12. Si $f(x) = x^2 + 2x + 3$; $g(x) = x - 5$. Hallar

$$E = \frac{(g\circ f)(1)+(f\circ g)(2).(f\circ g)(3)-(g\circ g)(2)}{f\circ g(2)}$$

13.- Sea f y g dos funciones cuyas reglas de correspondencia están dadas por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad -3<x<0 \\ 1-x & si \quad 0\le x<2 \end{cases} ,$$

$g(x) = 1 - x^2$, $-2 \le x \le 3$

determinar y graficar la función $\dfrac{f}{g}$.

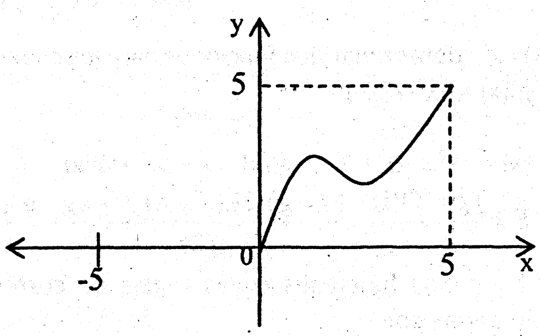
14. Sea la función f con regla de correspondencia:
$f(x) = \frac{x+1}{x}$. Determinar la regla de correspondencia y el dominio de la función fof.

II. FUNCIONES PAR, IMPAR Y FUNCIONES INYECTIVA SURYECTIVA Y BIYECTIVA

1.- a) Si el punto (5,3) está en la grafica de una función par, ¿cuál otro punto debe estar sobre la gráfica?
b) Si el punto (5,3) está en la grafica de una función impar, ¿cuál otro punto debe estar sobre la gráfica?

2.- Una función f tiene su dominio en [-5 , 5] y se muestra una parte de la grafica.

a) Complete la grafica de f si se sabe que está es par.
b) Complete la grafica de f si se sabe que está es impar.



3.-Determinar si f es par , impar o ninguna de las dos cosas , si f es par o impar, aplique la simetría para trazar su grafico.

a) $f(x) = x^{-1}$
b) $f(x) = x^2 + x$
c) $f(x) = x^3 - x$
d) $f(x) = x^{-3}$
e) $f(x) = x^4 - 4x^2$
f) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$
g) $f(x) = x^3 + 1$

5.-Definir una función f de modo que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

i) Dom(f) = R
ii) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ Para $x \in [0, +\infty[$
iii) f es impar

6.- Sea f una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & si \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

a) Graficar la función g con dominio $]-2,0[\cup]0,2[$, que sea impar y que coincida con f en el intervalo $]0,2[$.
b) Dar la regla de correspondencia para dicha función g.

7.- Sea f y g dos funciones cuyas reglas de correspondencia están dadas por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad -3 < x < 0 \\ 1-x & si \quad 0 \leq x < 2 \end{cases}, \quad g(x) = 1 - x^2, \; -2 \leq x \leq 3$$

¿Es $\dfrac{f}{g}$ una función creciente en todo su dominio? Justificar su respuesta.

8.- Considerar la función f con regla de correspondencia:

$f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ ¿Es f una función inyectiva? Justificar su respuesta.

9.- Graficar la función h definida de la siguiente forma:

$$h(x) = \begin{cases} \log_2(1-x) & si \quad x < 1 \\ \dfrac{x}{x-1} & si \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

Si el dominio de la función h se restringe al conjunto $[a;1[\cup]1;2[$, hallar el menor valor real de a para el cual la función es inyectiva en ese conjunto.

10.- Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta.

a) Si f: [a ; b]→R es una función inyectiva, entonces f es una función creciente en [a ; b].

b) Si $f(x) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{2x+3}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$, entonces $\text{Rang}(f) = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

III FUNCIÓN INVERSA

1. Hallar $f^{-1}(x)$ si existe para la función definida por
2.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$$

2.- Dada la función f:] -∞; a]→R definida por $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$

a) Determinar el mayor valor de a para que dicha función admita función Inversa.

b) Hallar la función inversa, determinando su regla de correspondencia y su dominio.

3. Encuentre la inversa de cada una de las funciones siguientes. Si existe la función inversa en cada caso dibuje las gráficas de la función dada su inversa y la identidad en un mismo sistema de ejes coordenados.

a) $f(x) = -3x-4$ b) $f(x) = \sqrt{3x-4}$

c) $4x^2 - 9y = 36$ d) $f(x) = (3-2x)^2$

e)

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2+8x-7 & si \quad x<2 \\ 2+\sqrt{x-2} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

f) $f(x) = -2x^2 - 6x - 5$, $\text{Dom}(f) =]-\infty; -\frac{3}{2}]$

CAPÍTULO 4

DERIVADA DE FUNCIONES REALES

4.1 LA DERIVADA

Definición.- Consideremos la función definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $y = f(x)$, si $x \in Dom(f)$ entonces la derivada de la función f con respecto a x denotado por $f'(x)$ está definido por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Siempre que dicho límite exista.

Ejemplo.

Determinar la derivada de la función definida por $f(x)= x+1$.
Solución:

Sabemos que $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ entonces tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h+1)-(x+1)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}(1) = 1$$

$$\therefore \quad f'(x) = 1$$

Sí x es un número particular cuyo valor es x = a del dominio de f, entonces la derivada de f en este punto denotado por f'(a) está definido por

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que dicho límite exista y es finito ó en forma equivalente se define la derivada en un punto si se realiza el siguiente cambio de variable $a + h = x_1$ entonces:

$$f'(a) = \lim_{x_1 \to a} \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a}$$

Siempre que dicho límite exista y es finito.

Ejemplo:
Calcular la derivad de f en el punto x = 3 si $f(x) = x^2+2$

Solución:

$$f'(3) = \lim_{x_1 \to 3} \frac{f(x_1) - f(3)}{x_1 - 3}$$

$$= \lim_{x_1 \to 3} \frac{x_1^2 + 2 - (3^2 + 2)}{x_1 - 1}$$

$$= \lim_{x_1 \to 3} \frac{x_1^2 - 9}{x_1 - 1}$$

$$= \lim_{x_1 \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x_1 - 1}$$

$$= \lim_{x_1 \to 3} (x_1 + 3)$$

$\therefore f'(3) = 6$

4.2. DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD

El procedimiento de calcular la derivada de una función se denomina *diferenciación*; esto es, la diferenciación es la operación mediante la cual se obtiene la función f' a partir de la función f.

Si una función tiene derivada en x_1, se dice que la *función es diferenciable en* x_1. Una función f es diferenciable en un intervalo abierto si es diferenciable en cada número del intervalo. Si la función es diferenciable en cada número de su dominio, entonces se dice que es una función diferenciable.

Ejemplo 1.

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2+2$ tiene como derivada a la función $f'(x)= 2x$. Como las funciones f y f' tienen como dominio el conjunto de todo los números reales entonces f es una función diferenciable en todo su dominio.

Ejemplo 2.

Consideremos la función f definido por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \sqrt[3]{x}$ cuya derivada es la función $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, La función f tienen como dominio el conjunto de todo los números reales y la función f' tiene como dominio el conjunto de todo los números reales excepto el numero x=0 puesto que f'(0) no existe. Por lo tanto la función f es una función diferencial en el conjunto R-{0}.

TEOREMA.

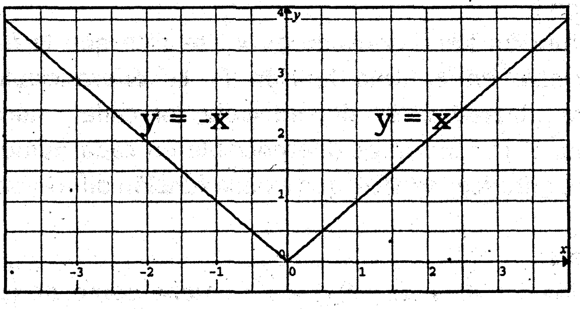
Si una función f es diferenciable en un número x_1, entonces f es continua en x_1.

Observación.

Lo reciproco del teorema no siempre se cumple es decir *no toda función continua es diferenciable*

Ejemplo

La función definida por f(x) = $|x|$ es una función continua en todo R, sin embargo no es diferenciable en R puesto que no es derivable en x = 0 es decir f'(0) no existe.



Si f(x) = x, x ≤ 0, entonces f'(x) = 1.
Si f(x) = x, x < 0, entonces f'(x) = -1.
Como $f'_+(0) = 1$ y $f'_-(0) = -1$ entonces f'(0) no existe

4.3.- DERIVADA LATERAL.

Definición.-

1. Si la función f está definida en x_1, entonces la derivada por la derecha de f en x_1 denotado por $f'_+(x_1)$ esta definida por:

$$f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad \text{si existe el limite.}$$

2. Si la función f está definida en x_1, entonces la derivada por la izquierda de f en x_1 denotado por $f'_-(x_1)$ esta definida por:

$$f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad \text{si existe el limite.}$$

Definición.- Una función f es diferenciable en x_1 si existen las derivadas laterales y son iguales.

i.e.

f es diferenciable en $x = x_1$ si y solo si $f'_{+}(x_1) = f'_{-}(x_1) = f'(x_1)$

Ejemplo.

Sea la función f definida por .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & si \quad x < 2 \\ \sqrt{x-2} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Determine sí f es diferenciable en x =2.

Solución.

La derivad a de f en $x \neq 2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x < 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}, si & x > 2 \end{cases}$$

Para determinar la derivad a de f en x =2 se utiliza las derivadas laterales tales como:

$$f'_{+}(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2} - 0}{x-2}$$

$$f'_{+}(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

La derivad a de f en x = 2 no existe

TEOREMA.

Si f y g son funciones diferenciables en $x \in Dom(f \cap g)$ entonces se cumple:

1.- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

2.- $(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

3.- $(cf)(x) = cf'(x)$.

4.- $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

4.4.- DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES BASICAS .

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en $x \in Dom(f)$ entonces se tiene que:

1.- $y = c$ entonces $y' = 0$

2.- $y = x$ entonces $y' = 1$

3.- $y = x^n$ entonces $y' = nx^{n-1}$

4.- $y = \sqrt[m]{x^n}$ entonces $y' = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

TEOREMA REGLA DE LA CADENA

Si la función f es diferenciable en x y la función g es diferenciable en f(x), entonces al función compuesta gof *es diferenciable en x, y* **$(gof)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$.**

Ejemplo.

Determinar la derivad de la función $y = (x^2+x-1)^{23}$

Solución

Consideremos la función $u = f(x) = x^2+x-1$ e $y = g(u)$ de donde se tiene que

$g(u) = g(f(x)) = gof(x)$, entonces

$$(gof)'(x) = 23(x^2+x-1)^{22}(2x+1).$$

4.5.- DERIVADA DE UNA FUNCIÓN IMPLÍCITA.

Una ecuación E(x,y) =0 define a y implícitamente en x , si existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = f(x)$. Si tales funciones son diferenciables entonces para determinar y'(x) se procede de la siguiente manera.

1.- Derive ambos miembros de la ecuación con respecto a x.

2.- cada vez que se derive los términos que contiene y, utilice la regla de la cadena puesto y es una función de x .

3.- Despeje algebraicamente y' en la ecuación derivada.

Ejemplo.

Hallar y' si $(x^2+4y^3)^4 = x^3y^2$

Solución

$$4(x^2+4y^3)^3(x^2+4y^3)' = 3x^2y^2 + 2x^3yy'$$

$$4(x^2+4y^3)^3(2x+12y^2y') = 3x^2y^2 + 2x^3yy'$$

$$y' = \frac{3x^2y^2 - 8x(x^2+4y^3)^3}{48y^2(x^2+4y^3)^3 - 2x^3y}$$

4.6.- DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Sea u = u(x), una función diferenciable en x e y = f(u) una función diferenciable en u entonces se tiene que:

1.- y = Sen(u) entonces y' = Cos(u).u'

2.- y = Cos(u) entonces y' = -Sen(u).u'

3.- y = Tan(u) entonces y' = Sec^2(u).u'

4..- y = Ctg(u) entonces y' = -Csc^2(u).u'

5.- y = Sec(u) entonces y' = Sec(u)Tan(u).u'

6.- y = Csc(u) entonces y' = -Csc(u)Tan(u).u'

4.7.- DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

Sea u = u(x), una función diferenciable en **x** e y = f(u) una función diferenciable en **u** entonces se tiene que:

1.- $y = e^u$ entonces $y' = e^u u'$

2.- $y = a^u$ entonces $y' = a^u Ln(a) u'$

3.- $y = Ln(u)$ entonces $y' = \frac{1}{u}u'$

4.- $y = Log_a(u)$ entonces $y' = \frac{1}{uLn(u)}u'$

4.8.- DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.

Sea u = u(x), una función diferenciable en x y y = f(u) una función diferenciable en **u** entonces se tiene que:

1.- $y = ArcSen(u)$ entonces $y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$, $|u| < 1$

2.- $y = ArcCos(u)$ entonces $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$, $|u| < 1$

3.- $y = ArcTan(u)$ entonces $y' = \frac{1}{1+u^2}u'$

4.- $y = ArcCtg(u)$ entonces $y' = -\frac{1}{1+u^2}u'$

5.- y = ArcSec(u) entonces $y'=\dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}u'$

6.- y = ArcSec(u) entonces $y'=-\dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}u'$

4.9.- DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR:

Sea una función f definida por f : ℝ →ℝ/ y = f(x).
Si f es una función diferenciable en x entonces existe la derivada de f con respecto a x denotado por f' y definida

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$,si existe el limite

Si f' es una función diferenciable en x, entonces existe la derivada de f' con respecto a x denotado por f'' y se denomina segunda derivada de f con respecto a x, definida por:

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$ si existe el limite.

Si f'' es una función diferenciable en x, entonces existe la derivada de f'' con respecto a x denotado por f''' y se denomina tercera derivada de f con respecto a x, definida
por:

$$f'''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}$$; si el límite existe.

En forma análoga se puede definir la n-ésima derivada de la función f con respecto a x denotado por $f^{(n)}(x)$ y definida por:

$$f^{(n)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h}$$, si existe el límite.

NOTACIÓN: $y = f(x) = f^{(0)}(x)$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(x)}(x)$$

Ejemplos.

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $y = (x^3+3x^2-5)^2$

Solución.

$$y' = 2(x^3+3x^2-5)(3x^2+6x)$$
$$y'' = 2(3x^2+6x)^2+2(x^3+3x^2-5)(6x+6)$$

4.10.- DERIVADAS DE ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Consideremos dos funciones f y g diferenciables en $t \in [a,b]$ tal que:

$$x = f(t)$$
$$y = f(t)$$

Que viene a ser las ecuaciones paramétricas de la función $y = y(x)$.

La derivada de y respecto de a x denotado por $\frac{dy}{dx}$, está definido por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

La *segunda derivada* de y respecto a x está definido por.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

o en forma equivalente se tiene que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

Ejemplos

1.- Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $x = t^2 + 1$; $y = t^3 + 2t$, en el punto $t = -2$.

Solución.

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 2 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 + 2}{2t}$$

2.- Hallar $\frac{dy^2}{dx^2}$ si $x = Cos(2t)$; $y = Sen^2(t)$.

Solución.

$$\frac{dy}{dt} = 2Sen(t)Cos(t) = Sen(2t) \quad , \quad \frac{dx}{dt} = -2Sen(2t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Sen(2t)}{-2Sen(2t)}$$ de donde se tiene que $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$

Sabemos que $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}$ entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(-\frac{1}{2})}{-2Sen(2t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

el ejemplo anterior se puede resolver utilizando la relación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2Sen(2t).2Cos(2t) - Sen(2t)(-4Cos(2t))}{(-2Sen(2t))^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

VI. EJERCICIOS

I. Usando definición de derivada, Determinar f'(x)

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = 3x + 8$
3. $f(x) = 4 - (x-3)^2$
4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
5. $f(x) = (x-1)^{-1/2}$
6. $f(x) = 4\,(2x-5)^{-1/2}$
7. $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$
8. $f(x) = e^x$
9. $f(x) = \operatorname{Ln} x$
10. $f(x) = -\cot x - x$

II. Usando la definición de derivada en un punto calcular f'(a)

1. $f(x) = 3x + \dfrac{6}{x^2}$; $a=1$
2. $f(x) = \dfrac{8}{x-2}$; $a = 6$
3. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1$; $a = 4$
4. $f(x) = \operatorname{Ln}(x+1)$; $a = 1$
5. $f(x) = e^{x+2}$; $a = 0$

III. Hallar las constantes a y b , si es f es diferenciable en x_0.

1. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & ,|x|\geq 1 \\ ax^2+b & ,|x|<1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+6 & ,x\leq 2 \\ ax+b & ,x>2 \end{cases}$, $x_0 = 2$

3. $f(x)=\begin{cases} ax^3+4x^2 & , \quad x<-\dfrac{1}{2} \\ bx-3 & , \quad x\geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$

4. $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & ,x<1 \\ a\sqrt{x}+\dfrac{b}{x+1} & ,x\geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

5. $f(x)=\begin{cases} a & x\leq 0 \\ x^2Lnx & x>0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

6. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\leq 2 \\ Ax+B & >2 \end{cases}$, $x_0 = 2$

IV. Usando reglas básicas de derivación y la regla de la cadena.

Hallar $f'(x)$

1. $f(x) = \operatorname{Cos}\left(\dfrac{3x-1}{2x+5}\right)$

2. $f(x) = \dfrac{Arc\ \operatorname{Cos}x}{x}$

3. $f(x) = \operatorname{Ln}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

4. $f(x) = \operatorname{Ln}(\operatorname{sen}x) - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2(\cos x)$

5. $f(x) = \operatorname{Ln}\left(x^3 \cdot \operatorname{sen}\left(x^2+1\right)\right)$

6. $f(x) = \sqrt{\tan^2 x + \operatorname{Sen}^2 x}$

7. $f(x) = \left(1 + \cos\left(x^2+2x\right)\right)^{1/4}$

8. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$

9. $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}$

11. $f(x) = \left|x^2 - 9\right|$

12. $y = \operatorname{Arc\ sen}\left(\operatorname{sen\,h} x^2\right)$

13. $f(x)=\dfrac{\operatorname{csch} x+\coth x}{\operatorname{csch} x-\coth x}$

14. $f(x) = 4^{\text{Arc sen } x}$

15. $f(x)=\operatorname{Ln}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{2-x}}\right)$

16. $f(x) = \operatorname{Sen}^3(\operatorname{Sen}^2(\operatorname{Sen} x))$

17. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos^2 x) \cdot \cos(\operatorname{sen}^2 x)$

18. $f(x) = \operatorname{Ln}^2 x - \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x)$

19. $f(x) = \operatorname{Sen}((\operatorname{sen}^7 x^7 + 1)^7)$

20. $y = 2^{\operatorname{Arcsen} 3x} + (1-\operatorname{Arccos} 3x)^2$

V. Derivación implícita. Hallar y'(x) para:

1. $x^3y + y^3x = 10$ en P (1,2)
2. $x^{2/3} y^{2/3} - 2y = 2$ en P(π/2, 1)
3. $x^{2/3} - y^{2/3} - 2y = 2$ en P $(1_1 - 1)$
4. $x = \operatorname{sen}(y^2) + 2y^3$
5. $y/x + e^{y/x} - (y/x)^{1/3} = 0$
6. $x + \operatorname{Ln}(x^2y) + 3y) + 3y^2 = 2x^2 - 1$
7. $e^y = x + y$
8. $y^3 (x+y) = x - y$
9. $xy = \operatorname{Arc tan}(x/y)$
10. $x \cos y - \operatorname{sen} y + \cos 2y = 0$
11. $y^5 - 2x^2y^3 + 3x^4 y - x^5 = 5$
12. $\sqrt{ay} + 2x = \sqrt{4}$

13. $y - x = \text{arc tan } y$

14. $\dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^3} = 5$

15. $\sqrt{\dfrac{y-\sqrt{x}}{y+\sqrt{x}}} + \sqrt{\dfrac{y+\sqrt{x}}{y-\sqrt{x}}} = 3$

16. $x^y = y^x$

17. $y = x^{e^x}$

18. $y = x^{x^x}$

19. $y = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2$

20. $y = (\text{sen } x)^{\tan x}$

21. $y = (x^2 + 1)^{\text{sen } x}$

22. $y = 2x^{\sqrt{x}}$

23. $y = (\cos x)^{2^x}$

24. $y = e^{\text{Ln} x^x}$

25. $y = x^{\text{Log}_x (x^2 + 3x - 1)}$

26. $y = \text{Log}_{(x-3)}(x^2 - 3x + 4)$...

VI. Hallar la derivada n – ésima de $y = f(x)$ sí:

1. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$
2. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$
3. $y == e^{ax}$
4. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$
5. $y = \sqrt{x}$
6. $y = (ax + b)^m$
7. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
8. $y = \dfrac{8x-5}{2x^2 + x - 6}$
9. $y = \dfrac{4x^2 + 3x + 5}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$
10. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 10x + 43}{x^2 - 4x - 5}$
11. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 10x + 43}{x^2 - 9x + 20}$

VII. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones dadas en forma paramétrica.

1. $x = \dfrac{2at}{1+t^2}$; $y = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}$
2. $x = a(t \operatorname{sen} t + \cos t)$
   $y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t)$

3. $x = \text{Arc} \quad \cos\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)$

$y = Arc \quad \text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$

4. $x = 2\cos t + 1$

$y = 3\,\text{sen}\, t$

5. $x = a\cos^3 t$

$y = a\,\text{sen}^3 t$

VIII. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ de las siguientes funciones dadas en su forma paramétrica

1. $x = \text{Ln}\, t$

   $y = t^3$

2. $x = \text{Arc (tan}\, t$

   $y = \text{Ln}\,(1 + t^2)$

3. $x = a\cos^3 t$

   $y = a\,\text{sen}^3 t$

4. $x = \cos 2t$

   $y = \text{sen}\, 2t$

5. $x = \text{Arc}\cos\sqrt{t}$

   $y = \sqrt{t - t^2}$

CAPITULO 5

APLICACIONES DE LA DERIVADA DE FUNCIONES REALES

5.1.- RECTA TANGENTE, RECTA NORMAL Y ÁNGULO ENTRE DOS CURVAS.

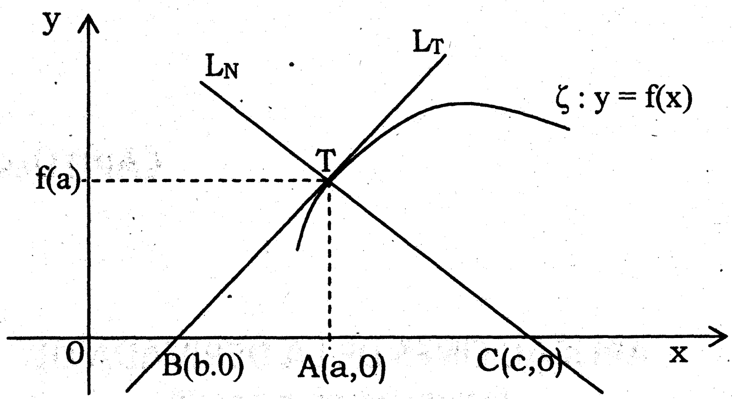
Definición.-Sea la ecuación de la curva $\zeta : y = f(x)$ y f es diferenciable en $x = a$

1.- La ecuación de la recta tangente L_t a la grafica de la curva ζ en el punto $T=(a , f(a))$ esta definido por:

$$L_t: \ y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

2.- La ecuación de la recta normal L_N a la grafica de la curva ζ en el punto $T =(a , f(a))$ esta definido por:

$$L_N \ : y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a).$$



De la figura anterior se definen los siguientes segmentos:
BT : Longitud de la tangente
CT : Longitud de la Normal
BA : Longitud de la Sub tangente (S_T)
AC : Longitud de la Sub Normal (S_N)

- Cálculo de la coordenada B(b.0).

Como $B(b.0) \in L_t$ entonces se tiene que:

$$0 - f(a) = f'(a)(b-a)$$

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

- Cálculo de la coordenada C(c.0).

Como $C(c.0) \in L_N$ entonces se tiene que:

$$0 - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(c-a).$$

$$c = a + f(a)\, f'(a)$$

- Cálculo de la longitud de la tangente (BT).

$$BT = d(B,T)$$

$$= \sqrt{(b-a)^2 + (0-f(a))^2}$$

$$= \sqrt{\left[-\frac{f(a)}{f'(a)}\right]^2 + [f(a)]^2}$$

Por consiguiente tenemos que la longitud de la tangente es

$$AT = \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|\sqrt{1+[f'(a)]^2}$$

Cálculo de la longitud de la Normal (CT).

$$CT = d(C,T)$$
$$= \sqrt{(c-a)^2 + (0-f(a))^2}$$
$$= \sqrt{[f(a)f'(a)]^2 + [f(a)]^2}$$

Por consiguiente tenemos que la longitud de la normal es

$$CT = |f(a)|\sqrt{1+[f'(a)]^2}$$

Cálculo de la longitud de la Sub tangente (S_T)

$$BA = S_T = d(B,A)$$
$$= \sqrt{(a-b)^2 + (0-0)^2}$$
$$= |b-a|$$

Por consiguiente tenemos que la longitud de la normal es

$$S_t = \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right|$$

- Cálculo de la longitud de la Sub Normal (S_N)

$$AC = S_N = d(A,C)$$
$$= \sqrt{(a-c)^2 + (0-0)^2}$$
$$= |a-c|$$

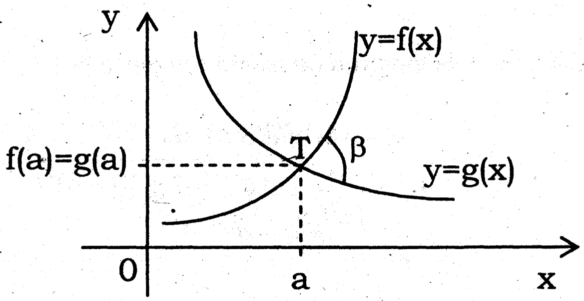
Por consiguiente tenemos que la longitud de la normal es

$$S_N = |f(a)f'(a)|$$

5.2.- ANGULO ENTRE DOS CURVAS

Sea la ecuación de las curvas ζ_1: $y = f(x)$ y ζ_2 : $y = g(x)$ con f y g diferenciables en x =a, la medida del ángulo $\propto$ que forman la grafica de las curvas ζ_1 y ζ_2 en el punto de intersección T(a,b) está definido por

$$Tan(\beta) = \frac{f'(a) - g'(a)}{1 + f'(a)g'(a)}$$



5.3.- VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

Definición: Sea f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$/ y = f(x) una función cuyo dominio es D y $a \in D$ entonces:

1) Se dice que f presenta un máximo valor absoluto en $x = a$, si $\forall\, x \in D$, se cumple que $f(x) \leq f(a)$ donde f (a) se denomina el máximo valor absoluto de f.

2) Se dice que f presenta un máximo relativo en x=a si existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)\ \forall\ x \in]a - \delta,\ a + \delta[$ donde f(a) se denomina máximo relativo de f.

Definición: Sea f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$/ y = f(x) una función cuyo dominio es D y $a \in D$ entonces:

1) Se dice que f presenta un mínimo absoluto en $x = a$ si $\forall\ x \in D$ si cumple que $f(a) \leq f(x)$ donde f (a) se denomina mínimo valor absoluto.
2) Se dice que f presenta un mínimo relativo si existe un $\delta > 0$ tal que $f(a) \leq f(x)\ \forall\ x \in]a-\delta, a+\delta[$ donde f (a) se llama mínimo valor relativo de f.

OBSERVACIÓN:

Si f(a) es un valor máximo o mínimo recibe el nombre de *EXTREMO RELATIVO DE f o VALOR EXTREMO DE f* y el punto a se denomina *PUNTO DEL EXTREMO.*

TEOREMA DEL EXTREMO ESTACIONARIO.

Sea f una función real tal que cumple:

i) f(a) es un extremo relativo de f.
ii) f es diferenciable en a.

Entonces $f'(a) = 0$.

PUNTO CRITICO

Definición Sea f : f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ /y = f(x) una función cuyo dominio es D. a∈D es llamado punto crítico de f o punto singular de f si:
f′ (a) = 0 ó f′(a) no existe

Ejemplo
Hallar los puntos críticos de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{6}(2x^3 + 3x^2 - 36x + 6$$

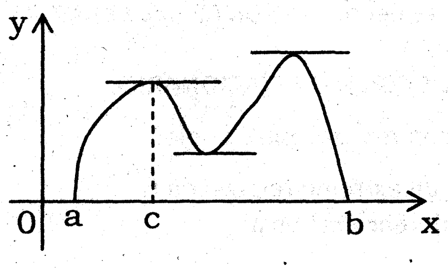
Solución.
$f(x) = \frac{1}{6}(2x^3 + 3x^2 - 36x + 6$ entonces $f(x) = x^2 + x - 6$
f′(x) = 0 entonces (x+3)(x-2) = 0
P.C. = {-3,2}

TEOREMA DE ROLLE.

Sea f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$/ y = f (x) una función definida en I =[a , b] tales que se cumple que:

i) f es continua en [a,b].
ii) f es diferenciable sobre]a , b[
iii) f(a) = f(b) =0.

Entonces existe al menos un c ∈]a,b[tal que f′(c) = 0.



Ejemplo.

Sea la función f(x) = $x^{4/3} - 3x^{1/3}$. Verificar que la función f satisface o no el teorema de Rolle en el intervalo [0 , 3]
Solución.-

- La función f(x) = $x^{4/3} - 3x^{1/3}$ es continua en x∈ [0 , 3]
- La función f es diferenciable $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ en x∈]0 , 3[

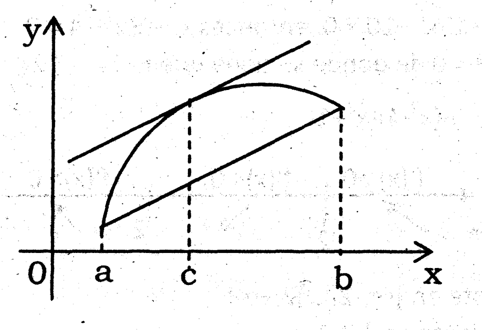
f(0) = f(3) = 0, entonces existe un c ∈]0 , 3[tal que f′(c) = 0

es decir $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = 0$

$f'(x) = \frac{4x-3}{3x^{\frac{2}{3}}} = 0$ entonces existe un c = $\frac{3}{4}$∈]0 , 3[

TEOREMA DE VALOR MEDIO.

Sea f: ℝ→ℝ/ y = f (x) una función continua en [a , b], y diferenciable sobre]a , b[entonces existe un c ∈]a , b[tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.



Ejemplo.
Verificar que la función f(x) = x - x^3 cumple la hipótesis del teorema de valor medio en el intervalo [-2 , 1] y calcular el valor de c tales que se cumpla $f'(c)=\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}$

Solución.-
La función f(x) = x - x^3 es continua en $x\in[-2\,,1]$
Es diferenciable f'(x) = 1 - $3x^2$, en $x\in\,]-2\,,1[$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}$$

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{0-(-2+8)}{3},\text{ entonces } f'(c)=-2$$

Como f'(c) = 1-$3c^2$ entonces $1\text{-}3c^2=-2$ de conde se tiene que

c = $-1\in\,]-2\,,1[$

TEOREMA: Sea f : R →R una función derivable en $x\in\,]a,b[$ entonces:

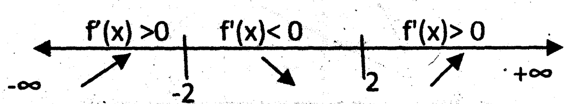
i) Si f' (x) > 0 , ∀ $x\in\,]a,b[$ entonces f es creciente en $]a,b[$.
ii) Si f' (x) < 0 , ∀ $x\in\,]a,b[$ entonces f es decreciente en $]a,b[$.

Ejemplo
Hallar los intervalos donde la función f es creciente y decreciente

$$f(x)=x^5-5x^3-20x-2$$

Solución.
Derivando la función f (x) = $x^5-5x^3-20x-2$ se tiene que
f'(x) = $5x^4-15x^2-20=0$, entonces $x^4-3x^2-4=0$
$(x^2-4)(x^2+1)=0$ de donde se tiene que P.C ={-2,2}

Como f'(x) = $5(x^2-4)(x^2+1)$



f es creciente en]∞,-2[∪]2,+∞[.
f es decreciente en]-2,2[

5.4.- CRITERIOS PARA EXTREMOS RELATIVOS

1.-TEOREMA (Criterio de la Primera Derivada):

Sea f : f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$/ $y = f(x)$ una función definida en el intervalo $I =]a, b[$ y $c \in I$ donde c es un punto crítico de f con f continua en $x = c$, entonces:

i) Si $f'(x) > 0$, $\forall\, x\in]a,c[$ y $f'(x) < 0$, $\forall\, x\in]c,b[$ entonces f(c) es un máximo relativo de f.

ii) Si $f'(x) < 0$, $\forall\, x\in]a,c[$ y $f'(x) > 0$, $\forall\, x\in]c,b[$ entonces f(c) es un mínimo relativo.

iii) Si $f'(x) > 0$ $\forall x\in]a,c[$ y $f'(x) > 0$ $\forall\, x \in]c,b[$

ó

$f'(x) < 0$ $\forall\, x \in]a,c[$ y $f'(x) < 0$ $\forall\, x \in]c,b[$

entonces f (c) no es máximo ni mínimo relativo.

2.- **TEOREMA** (Criterio de la Segunda Derivada)

Si f es una función tal que:

i) f tiene derivadas hasta el segundo orden en $]c-\delta, c+\delta[$

ii) $f'(c) = 0$

iii) $f''(c) \neq 0$

Entonces se tiene:

1) Si $f''(c) < 0$ entonces f (c) es un máximo relativo de f.
2) Si $f''(c) > 0$ entonces f (c) es un mínimo relativo de f.
3) Si $f''(c) = 0$ falla el criterio.

Ejemplo.

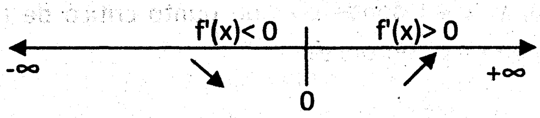
Hallar los extremos relativos y graficar la función f si:

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4.$$

Solución

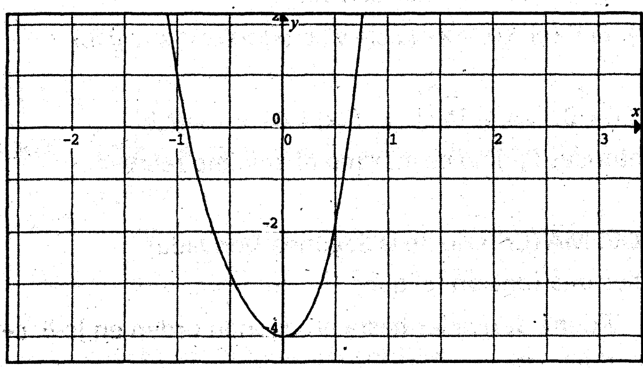
Primero se determina los punto críticos para lo cual de deriva f como: $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 + 12x$ de donde se tiene que

$f'(x) = 12x(x^2 + x + 1) = 0$, entonces P.C. = $=\{0\}$



Existe un mínimo relativo en $x = 0$ cuyo valor es $f(0) = -4$

Grafica de la función $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4$.



Tarea para el lector.

Determinar los extremos relativos de la función f y graficar, si:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$.

b) $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$.

TEOREMA: Sea f una función definida en [a,b] entonces:

1) Si $f'(a) > 0 \rightarrow f(a)$ es un mínimo relativo de f.
2) Si $f'(b) < 0 \rightarrow f(b)$ es un máximo relativo de f.
3) Si $f'(a) < 0 \rightarrow f(a)$ es un máximo relativo de f.
4) Si $f'(b) > 0 \rightarrow f(b)$ es un máximo relativo de f.

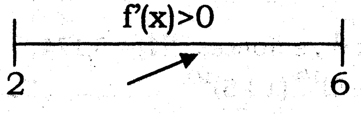
Ejemplo.

Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$. Hallar todos los extremos relativos de f en [2,6] y graficar.

Solución.

Primero se determina los punto críticos para lo cual de deriva f como: f(x) = x- 2 de donde se tiene que

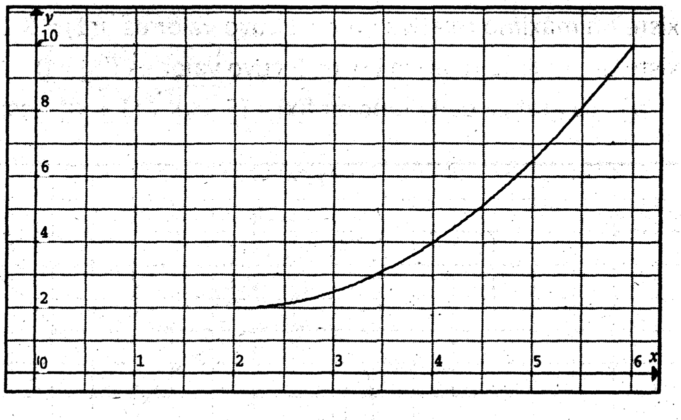
$f'(x) = x - 2 = 0$, entonces P.C. = {2}



Existe un mínimo en x = 2 cuyo valor es f(2) = 2

Existe un máximo en x = 6 cuyo valor es f(6) =10

La grafica de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$, es:



Ejemplo.

Hallar los extremos relativos de f si:

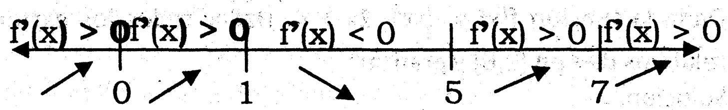
a) $f(x) = (5-x)^{2/3}(1+x)^{1/3}$

Solución

$f(x) = (5-x)^{2/3}(1+x)^{1/3}$

$f'(x) = -\frac{2\sqrt[3]{1+x}}{3\sqrt[3]{5-x}} + \frac{\sqrt[3]{(5-x)^2}}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$, entonces $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt[3]{(5-x)(1+x)^2}}$

Los puntos críticos son: P.C.= {0,1,5,7}



$f(x) = (5-x)^{2/3}(1+x)^{1/3}$

$f(0) = (5-0)^{2/3}(1+0)^{1/3}$, , entonces $f(0) = (5)^{2/3}$

$f(1) = (5-1)^{2/3}(1+1)^{1/3}$

$f(1) = 2\sqrt[3]{4}$, entonces $f(1) = 3{,}174$

$f(5) = (5-5)^{2/3}(1+5)^{1/3}$

$f(5) = 0$

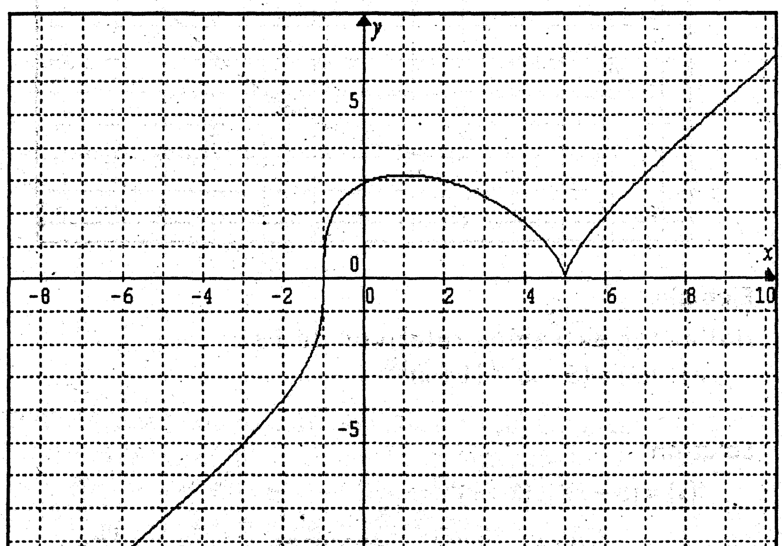
$f(7) = (5-7)^{2/3}(1+7)^{1/3}$, , entonces $f(7) = 2\sqrt[3]{4}$

$f(7) = 3{,}174$

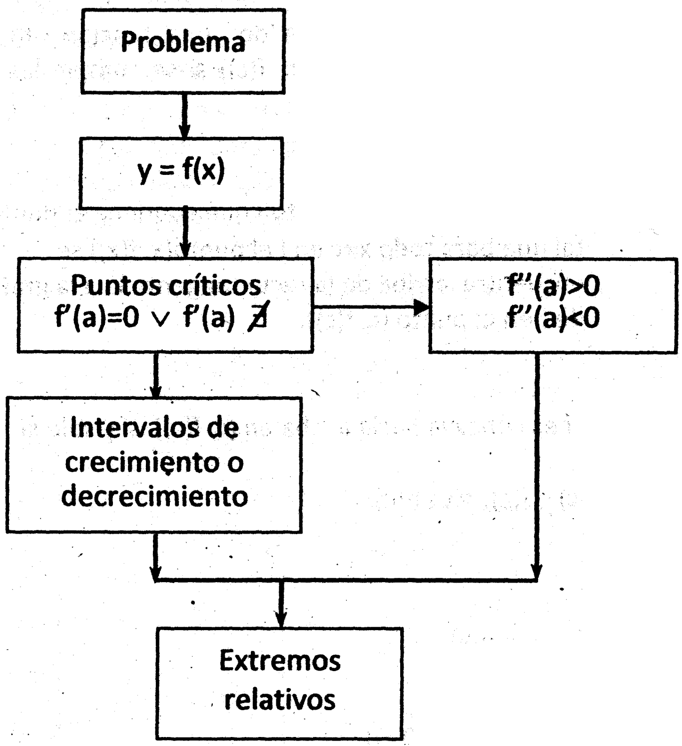
Existe un máximo relativo en x = 1 cuyo valor es f(1) = 3,174.

Existe un mínimo relativo en x = 5 cuyo valor es f(5) = 0

a) La grafica de la funcion $f(x) = (5-x)^{2/3}(1+x)^{1/3}$,es:



Observación.- Para determinar los extremos relativos de una función se tiene:



5.5. CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

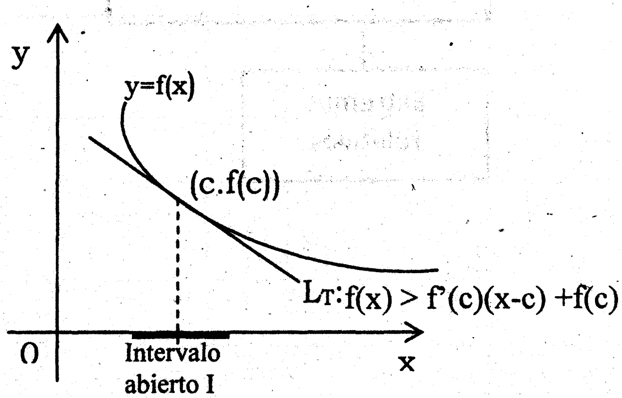
5.5.1. CONCAVIDAD HACIA ARRIBA.

Definición.- Decimos que la grafica de una función f(x) es cóncava hacia arriba en el punto (c, f(c)) si se cumple las dos condiciones siguientes:

i) Existe f'(c)
ii) Existe un intervalo abierto I que contiene al punto c, tal que para todo $x \neq c$ en I el punto(x, f(x)) se encuentra arriba de la recta tangente L_T a la grafica de f en el punto (c, f(c)).

i.e.
La grafica de f es cóncava hacia arriba en (c, f(c)) si y sólo si

$$f(x) > f'(c)(x-c) + f(c), \forall x \in I-\{c\}.$$



5.5.2. CONCAVIDAD HACIA ABAJO.

Definición.- Decimos que la grafica de una función f(x) es *cóncava hacia abajo* en el punto (c, f(c)) si se cumple las dos condiciones siguientes:

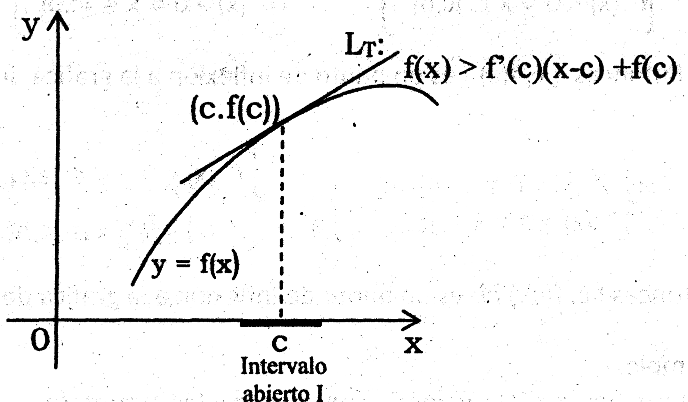
i) Existe f'(c)

ii) Existe un intervalo abierto I que contiene al punto c, tal que para todo $x \neq c$ en I el punto(x,f(x)) se encuentra por debajo de la recta tangente L_T a la grafica de f en el punto (c, f(c)).

i.e.

La grafica de f es cóncava hacia abajo en (c, f(c)) si y solo si

$$f(x) < f'(c)(x-c) + f(c),\ \forall x \in I-\{c\}.$$



TEOREMA.- Sea f una función dos veces diferenciable en]a,b[

i) Si f'' (x) > 0 en]a,b[→ la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre]a,b[.

ii) Si f'' (x) < 0 en]a,b[→ la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre]a,b[.

Definición.- Un punto (c, f(c)) de la grafica de una función f(x) se denomina *PUNTO DE INFLEXIÓN DE f* si existe la recta tangente a la grafica de f(x) en el punto (c,f(c)) y la concavidad de f cambia de dirección en el punto (c, f(c)).

TEOREMA.- Sea $(c_1\ f(c))$ un punto de inflexión de la gráfica de una función diferenciable en]a,b[y $c \in]a,b[$.entonces $f''(c) = 0$ ó $f''(c)$ no existe .

TEOREMA.- Sea f una función diferenciable en]a,b[, $c \in]a,b[$ tal que $f''(c) = 0$ ó $f''(c)$ no existe, entonces

i) Si $\left\{\begin{array}{l} f''(x) > 0\ \forall\ x \in]a,c[\\ f''(x) < 0\ \forall\ x \in]c,b[\end{array}\right\}$ ó $\left\{\begin{array}{l} f''(x) < 0\ \forall\ x \in]a,c[\\ f''(x) > 0\ \forall\ x \in]c,b[\end{array}\right\}$

Entonces (c, f(c)) es un punto de inflexión a la gráfica de f.

ii) Si $\left\{\begin{array}{l} f''(x) > 0\ \forall\ x \in]a,c[\\ f''(x) > 0\ \forall\ x \in]c,b[\end{array}\right\}$ ó $\left\{\begin{array}{l} f''(x) < 0\ \forall\ x \in]a,c[\\ f''(x) < 0\ \forall\ x \in]c,b[\end{array}\right\}$

Entonces (c, f(c)) no es un punto de inflexión a la gráfica de f.

Ejemplo.

Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la grafica de las siguientes funciones

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + x - 1.$

Solución

Para determinar los intervalos de concavidad se determina la segunda derivada de la función $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + x - 1$, como $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x + 1$

$f''(x) = 12x^2 - 24x - 36 = 0$, entonces $f''(x) = 12(x^2 - 2x^2 - 3)$;

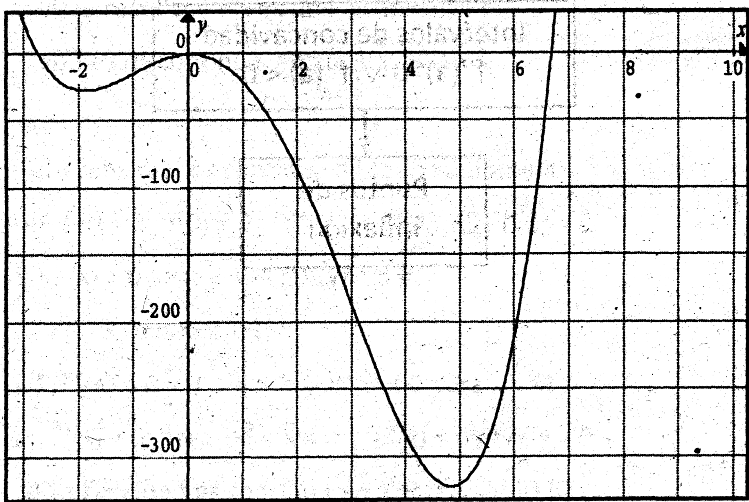
$f''(x) = 12(x-3)(x+1) = 0$ entonces P.C.I. = $\{-1,3\}$

$-\infty$		-1		3		$+\infty$
	$f''(x) > 0$		$f''(x) < 0$		$f''(x) > 0$	
	$\cup$		$\cap$		$\cup$	

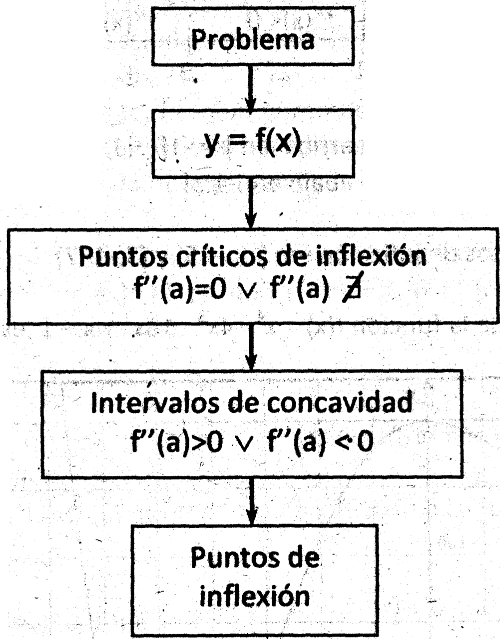
f es cóncava hacia arriba en $]\infty,-1[\cup]3,+\infty[$.
f es cóncava hacia abajo en $]-1,3[$

Existe puntos de inflexión en: (-1, -15) y (3,-187)

•La grafica de la función $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + x - 1$, es:



Observación.- Para determinar los puntos de inflexión se sigue el siguiente diagrama de flujo.



VII EJERCICIOS

I.-Dibuje la grafica de una función $y = f(x)$ que satisface cada una de las siguientes condiciones.

1.- i) Es creciente en el intervalo $]-\infty,2[$

ii) $f'(-1) = 0$; $f(2) = 7$; $f(1) = 5$

iii) $f''(x) > 0$; $\forall\, x \in]-1,1[\cup]3,+\infty[$

iv) f es cóncava hacia abajo en $x \in]-\infty,-1[\cup]1,3[$

v) $f''(-1) = f''(1) = 0$

vi) la recta L: $y = x$ es una asíntota de f

vi) f es discontinua en $x = 3$ y $f(3) = 9$

2.- i) La función f es continua en todo su dominio.

ii) $f(-4) = 3$; $f(0) = 0$; $f(3) = 2$; $f'(-4) = 0$; $f'(3) = 0$

iii) $f'(x) > 0$ para $x < -4$; $f'(x) < 0$ para $-4 < x < 3$;

$f'(x) < 0$ para $x > 3$

iv) $f''(-4) = 0$; $f''(0) = 0$; $f''(x) < 0$ para $x < -4$;

$f''(x) > 0$ para $-4 < x < 0$; $f''(x) < 0$ para $x > 0$

3.- i) La función f es continua en el intervalo $[0,6]$

ii) $f(0) = f(4) = 1$; $f(2) = 2$; $f(6) = 0$

iii) $f'(x) > 0$ en $]0,2[$; $f'(x) < 0$ en $]2,4[\cup]4,6[$

iv) $f'(2) = f'(4) = 0$; $f''(x) > 0$ en $]0,1[\cup]3,4[$; $f''(x) < 0$ en $]1,3[\cup]4,6[$

II Determinar los extremos relativos y puntos de inflexión de las siguientes funciones y realizar la grafica de la función dada.

1.- $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$.

2.- $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

3. - $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^2$

4.- $f(x) = 2Sen(4x)$, para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

5.- $f(x) = 4\sqrt{x} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

6.- $f(x) = x\sqrt{x+3}$

7.- $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x-2}$

8.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

9.- $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ para $x \in [-2,0]$

10.- $f(x) = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4 + 3$, para $x \in [-1,1]$

11.- $f(x) = (x^2 - 4)^5$, para $x \in [-3,2]$

12.- $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $\frac{1}{2} \le x \le 3$

13.- $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 3$, en $x \in [-1,3]$

14.- $f(x) = x^{2/3}(x-3)$ en $x \in [-3,5]$

15.- $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, en $x \in [-1,4]$

16.- Para la función $f(x) = (1 - x)^2 (1 + x)^3$

Determinar:

a) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento.
b) Los valores de x en los que ocurren los extremos relativos.
c) Los extremos relativos de f.
d) Trace la gráfica de f.

17.-Hallar los valores de las constantes a, b, c y d tales que la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,tenga un extremo relativo en los puntos(1,2) y (2,3)

18.- Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$.

Determinar:

a) los valores críticos.
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Los extremos relativos.
d) Los intervalos de concavidad.
e) Los puntos de inflexión.
f) La grafica f considerando los interceptos con los ejes y asíntotas.

19.- Sea la función $f(x) = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4 + 3$, $x \in [-2,1]$.

Hallar los extremos relativos, los intervalos de concavidad, puntos de inflexión y bosquejar la gráfica indicando los extremos relativos y puntos de inflexión.

20.- Sea la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Determinar:

a) los valores críticos.
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Los extremos relativos.
d) Los intervalos de concavidad.
e) Los puntos de inflexión.
f) La grafica f considerando los interceptos con los ejes y asíntotas.

III Teorema de Rolle y Valor medio.

i) Verificar en cada caso la hipótesis del teorema de Rolle para la función f y determinar el valor de la constante c que hace referencia dicho teorema.

a) $f(x) = x^2 + 2x$ en $x \in [-2,0]$

b) $f(x) = x\sqrt{x-2}$ en $x \in [0,2]$

c) $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x^2+2}$ en $x \in [-1,0]$

ii) Verificar en cada caso la hipótesis del teorema de Valor Medio para la función f y determinar el valor de la constante c que hace referencia dicho teorema.

a) $f(x) = x^2 + 2x$ en $x \in [-2,0]$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en $x \in [0,1]$

c) $f(x) = x(x+1)(x-2)$ en $x \in [-1,2]$

d) $f(x) = x + \sqrt{2x-1}$ en $x \in [1,5]$

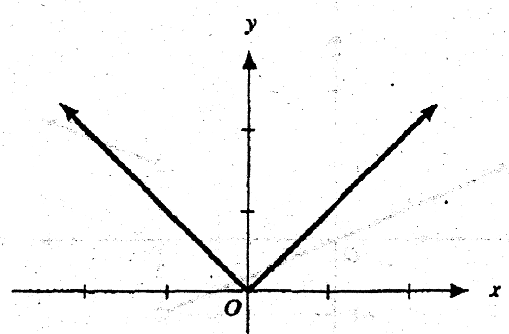
e) Sea C la curva descrita por la gráfica de la función:

$f(x) = x^3 - 5x + 3$, $x \in [-1,3]$. Demostrar que existe un punto $c \in]-1,3[$ tal que la recta tangente a la curva C en (c.f(c)) es paralela a la recta que pasa por los puntos (-1,7),(3,15). Asimismo, hallar la pendiente de la recta tangente y el valor de c.

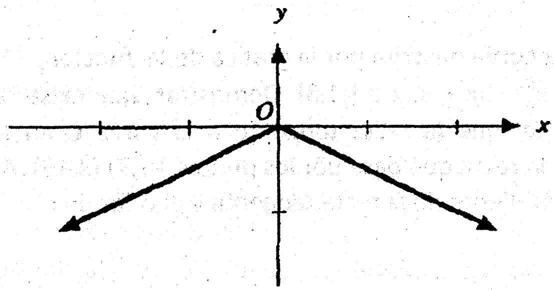
IV. La figura adjunta es la gráfica de la derivada de la función F cuyo dominio es todo los números reales y la cual es continua en todo su dominio. A partir de la figura determinar:

g) los valores críticos.
h) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
i) Los extremos relativos.
j) Los intervalos de concavidad.
k) Los puntos de inflexión.
l) La grafica de F

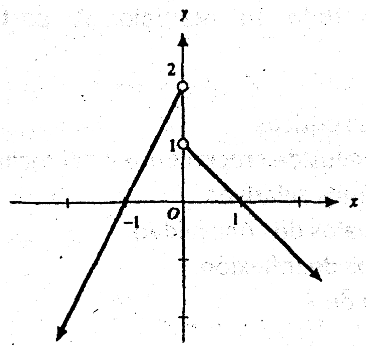
1.- F(0) = 0



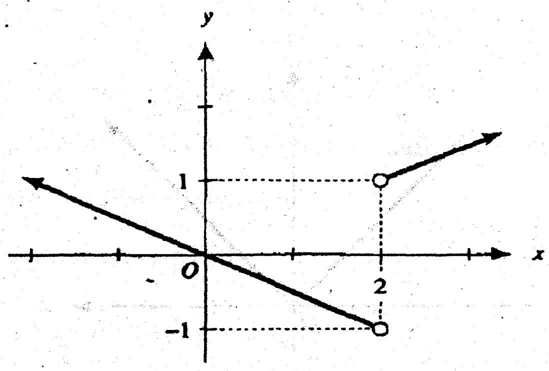
2.- F(0) = 0



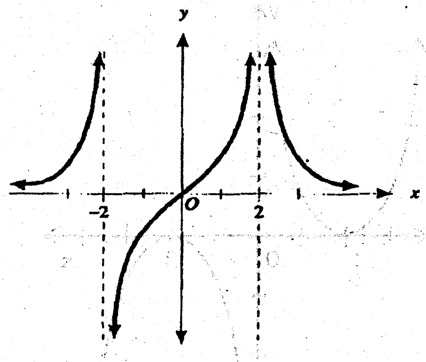
3. Los ceros de f son -2, 0 y 2



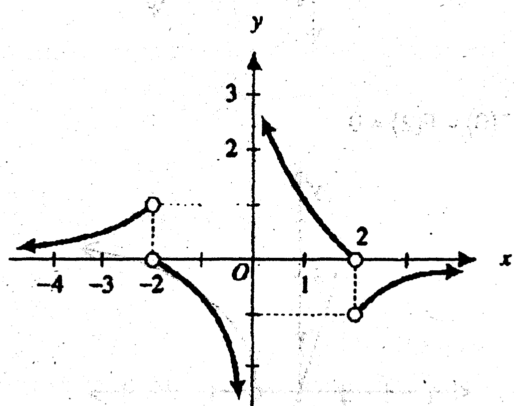
4.- Los ceros de f son 0 y 4



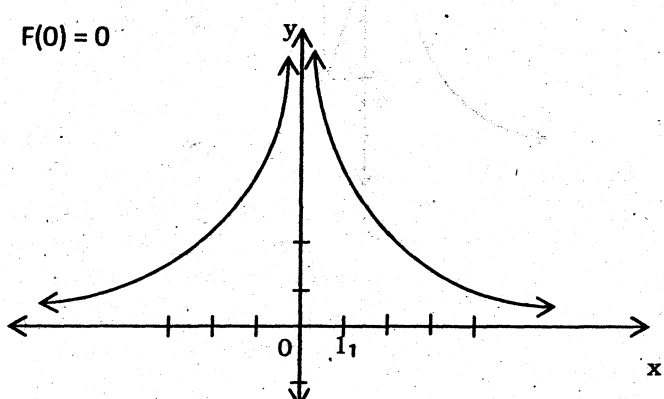
5.- Los ceros de f son -3, -1 y 1



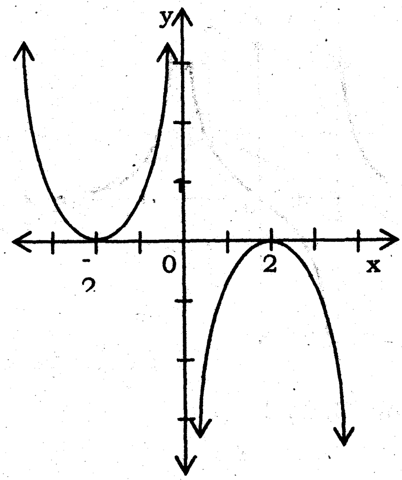
6.- Los ceros de f son -3, 0 y 3



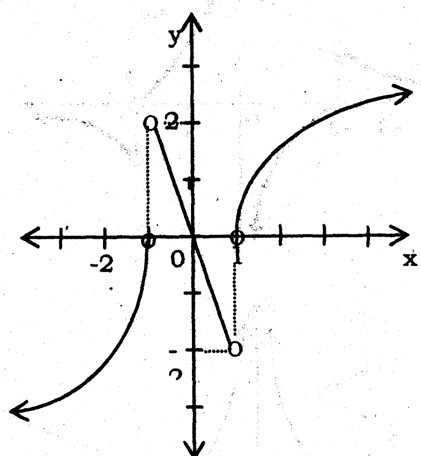
7.- Si F(0) = 0



7.- $F(-2) = F(2) = 0$



8.- Si $F(-2) = F(0) = F(2) = 0$



5.6. ANÁLISIS MARGINAL

5.6.1.- COSTO MARGINAL

Definición:
Sea y = C(x) la función de costo total, se denomina costo marginal a la primera derivada de la función costo con respecto a x.

i.e

Costo marginal = C'(x)

- El costo promedio de artículos adiciónale es:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}$$

- El costo promedio de producir x artículos es igual a la razón del costo total C(x) y el costo promedio por artículo.

i.e

$$(\text{costo promedio por artículo}) = \frac{C(x)}{x} = \overline{C}(x)$$

Ejemplo.
Sea la función costo $C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 100$, donde x es el número de artículos Determinar.

a) El costo marginal cuando x es: 50, 100 y 150 artículos.
b) El costo promedio de producir, si la producción x crece de 100 a 150 artículos.
c) El costo promedio de producir x artículos.

Solución.

a) la función costo marginal es y = C'(x) entonces

$C'(x) = 0.003x^2-0.6x+40$

Para x = 50 se tiene

$C'(50) = 0.003(50)^2-0.6(50)+40$

$C'(50) = 17.5$ u.m./articulo

Para x = 100 se tiene

$C'(100) = 0.003(100)^2 - 0.6(100) + 40$
$C'(100) = 10$ u.m./articulo
Para $x = 150$ se tiene
$C'(150) = 0.003(150)^2 - 0.6(150) + 40$
$C'(150) = 17.5$ u.m./articulo

b) El costo promedio de producir de 100 a 150 artículos

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(150) - C(100)}{150 - 100}$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{2725 - 2100}{50}$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 12.5 \text{ u.m./articulo}$$

c) El costo promedio de producir $\frac{C(x)}{x} = \overline{C}(x)$

$$\overline{C}(x) = 0.001x^2 - 0.3x^3 + 40 + \frac{100}{x}$$

5.6.2. INGRESO MARGINAL.

Definición.

Consideremos los ingresos derivados de la venta de los productos o servicios de una empresa. Si R (x) denota el ingreso en unidades monetarias por la venta de x artículos entonces el ingreso marginal se define como:

Ingr. Marg = R' (x)

Si x unidades de un producto se venden a un precio P entonces el ingreso total R(x) está dado por:

R (x) = x.P

Si x es la unidad de producto y P = f (x) la demanda o el precio de mercado entonces el ingreso será:

$$R(x) = x.f(x)$$

De donde se tiene que el ingreso marginal es:

$$R'(x) = f(x) + x.f'(x)$$

Ejemplo.
Determinar el ingreso marginal en x = 300 si la ecuación de la demanda es x = 1000 - 100p. Además calcule el nivel de producción que maximice los ingresos.

Solución.

El ingreso está definido por R = xp; donde p = f(x)
Sabemos que 100p = 1000 - x $\longrightarrow$ p = 10 - 0.01x de donde se tiene que
$R(x) = x(10-0.01x) = 10x - 0.01x^2$
El Ingreso Marginal seria: $R'(x) = 10-0.02x$
si x= 300 entonces $R'(300) = 10-0.02(300) = 4$

El nivel de producción que maximice el ingreso será cuando:

$R'(x) = 0$ entonces se tiene $10 - 0.02x = 0$ de donde $x = 500$

Por lo tanto la taza de producción que origina el ingreso máximo es x = 500, la que resulta un ingreso total de 2500u.m.

5.6.3. UTILIDAD MARGINAL.

Definición

La Utilidad marginal viene a ser la primera derivada de la función Utilidad.
i.e

$$\text{Utilidad Marginal} = U'(x)$$

Donde la función utilidad se define como:

$$\mathbf{U(x) = R(x) - C(x)} \quad \text{ó}$$
$$\mathbf{U(x) = (utilidad\ unitaria)\ (volumen\ de\ ventas).}$$

Ejemplo.
La ecuación de la demanda de cierto articulo es $p + 0.1x = 80$ y la función de costo es
$C(x) = 500 + 20x$. ¿calcule la utilidad marginal cuando x es 150 y 400 unidades de articulo?.

Solución.
$U(x) = R(x) - C(x)$ sabemos que $R(x) = x.p$ entonces se tiene

$R(x) = x(80 - 0.1x)$ de donde la utilidad es

$U(x) = 80x - 0.1x^2 - 500 - 20x$

$U(x) = 60x - 0.1x^2 - 500$ por consiguiente la utilidad marginal seria

$U'(x) = 60 - 0.2x$
si $x = 150$ entonces $U'(150) = 60 - 30 = 30$
si $x = 400$ entonces $U'(400) = 60 - 80 = -20$

Si x =150 se obtiene una utilidad marginal de 30 u.m. esto significa que, la utilidad extra por cada artículo

adicional cuando la producción se incrementa en una pequeña cantidad es de 30 u.m.
Cuando x = 400 la utilidad marginal es -20 en consecuencia si se producen 400 unidades, un pequeño incremento en la producción dá como resultado una pérdida de 20u.m. por unidad adicional.

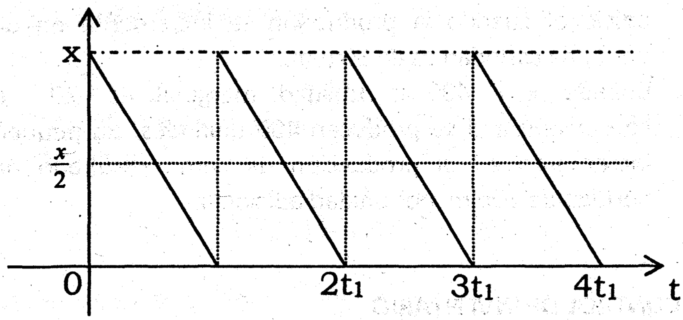
5.7. CONTROL DE INVENTARIO

Cuando una empresa realiza pedidos y almacena provisiones para utilizarlas más tarde o revenderlas, debe decidir el tamaño de cada orden. Si pide suficientes provisiones para todo un año, el negocio incurre en fuertes costos de capital que está invertido. Para reducir estos costos de mantenimiento, la firma podría pedir pequeñas cantidades de provisiones a intervalos frecuentes. Sin embargo esta política aumenta los costos de pedido, estos costos pueden consistir en cargos por flete, costos por preparar los pedidos y los costos por recibir y verificar las órdenes a la llegada, obviamente la firma debe encontrar una política de control de inventarios que caiga entre estos dos extremos.

El costo de inventario se define como:

$$\text{Costo de Inventario} = (\text{Costo de Pedido}) + (\text{Costo de mantenimiento})$$

Donde cada orden tiene el mismo tamaño. El tamaño del pedido que minimiza el costo de inventario se denomina *CANTIDAD OPTIMA DE PEDIDO* en ingles es: economic order quatity por lo que se conoce también como EOQ, que es el tamaño del lote económico.



La política para determinar el costo de inventario tiene las siguientes condiciones.

- El periodo de tiempo o intervalo de tiempo de cada pedido es el mismo.
- Cuando el último artículo de un pedido se agota en almacén llega automáticamente el siguiente pedido tal como se observa en la figura anterior.
- El nivel máximo de pedido es x y el nivel promedio es $\frac{x}{2}$

Ejemplo:

1.- El gerente de un supermercado quiere establecer una política óptima de inventarios para pollo congelado y ha estimado que se venderá un total de 1200 toneladas durante el próximo año a una razón constante. El gerente planea hacer varios pedidos del mismo tamaño a intervalos de tiempos iguales repartidos durante todo el año.

Utilizando los datos que se dan a continuación y determine la cantidad óptima de pedido, esto es el tamaño de pedido que minimiza el costo total de mantenimiento y de pedido.

1.- El costo de pedido por cada entrega es: $75.

2.- Cuesta \$8 tener una tonelada de pollo en inventario por una año (los costos de mantenimiento se deben calcular en el inventario promedio durante el periodo entre pedidos)

Solución.

Sea x la cantidad pedida y r el número de pedidos durante el año. El número de toneladas de pollo en inventario declina de manera constate desde x toneladas (cuando se recibe un nuevo pedido) a 0 toneladas al final del periodo entre pedidos. La figura muestra que el número promedio de Tn almacenadas durante el año es $\frac{x}{2}$.

Como el costo de mantenimiento por una Tn es \$8 por año, el costo por $\frac{x}{2}$ Tn es $8.\frac{x}{2}$ dólares. Ahora.

(Costo de inventario) = (Costo de Pedido) + (Costo de mantenimiento)

$$(\text{Costo de inventario}) = 75r + 8.\frac{x}{2} = 75r + 4x$$

Como hay r pedidos de x Tn cada uno, el número total de Tn pedidos durante el año es r.x, por ello la ecuación

respectiva es: $r.x = 1200 \longrightarrow r = \frac{1200}{x}$

costo de inventario = $C(x)\ 75\frac{1200}{x} + 4x$ entonces

$$C(x) = 75\left(\frac{1200}{x}\right) + 4x$$

$$C'(x) = -\frac{75.1200}{x^2} + 4$$

$C'(x) = 0$ entonces $x = 150$

El tamaño optimo de pedido es de 150 Tn de pollo.

5.8. ELASTICIDAD

5.8.1. ELASTICIDAD DE LA DEMANDA

Si q denota la demanda de un determinado articulo y p su precio, la elasticidad de la demanda representada por la letra griega eta η está definido como el *cambio porcentual en la demanda q debido a un incremento del uno por ciento en el precio*

η = (Cambio porcentual en q)(incremento del uno por ciento en el precio)

$$\eta = \left(\frac{Cambio \quad en \quad q \quad 100}{q}\right)(\,1\%p)$$

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

5.8.2. NIVELES DE ELASTICIDAD.

1.- Sí $|\eta| > 1$, se dice que la demanda es ***Elástica*** con respecto al precio

2.- Sí $|\eta| < 1$, se dice que la demanda es ***Inelástica*** con respecto al precio

3.- Si $|\eta| = 1$, se dice que la demanda es de ***elasticidad Unitaria*** con respecto al precio

5.8.3. ELASTICIDAD DEL INGRESO.

Sabemos que el ingreso está definido como R(q) = q.p derivando implícitamente con respecto al precio tenemos.

$\frac{dR}{dp}$ = q + p$\frac{dq}{dp}$ dividiendo por q y teniendo en cuenta que

$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$ tenemos $\frac{1}{q}\frac{dR}{dp} = 1 + \eta$ de donde se tiene que:

$$\frac{dR}{dp} = q(1+\eta)$$

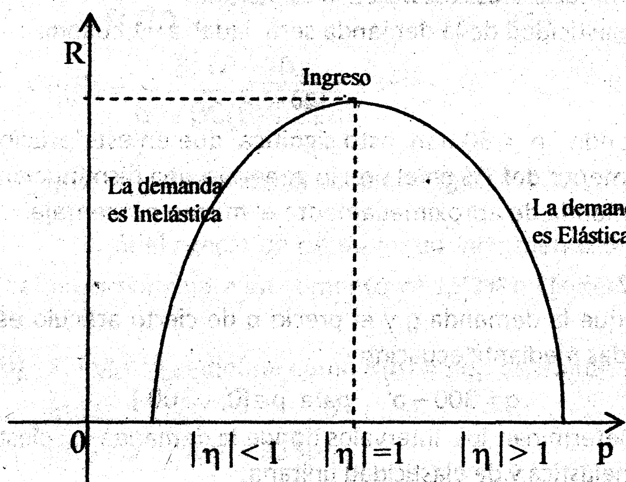
Donde:

1.- Sí la demanda es ***Inelástica*** con respecto al precio ($|\eta| < 1$) , el ingreso total se incrementa a medida que aumenta el precio.

2.- Sí la demanda es ***elástica*** con respecto al precio ($|\eta| > 1$) , el ingreso total disminuye a medida que aumenta el precio.

3.-el nivel de ingreso que maximice el ingreso total es cuando la demanda es de ***elasticidad Unitaria*** con respecto al precio ($|\eta| = 1$)

La grafica de la función ingreso muestra que si la demanda es ***Inelástica*** con respecto al precio ($|\eta| < 1$) el ingreso es creciente y es decreciente la grafica de la función ingreso sí la demanda es ***elástica*** con respecto al precio ($|\eta| > 1$).



Ejemplo 1.

Suponga que la demanda q y el precio p de cierto articulo se relaciona mediante ecuación lineal

$$q = 240 - 2p, \text{ para } p \in [0,120].$$

a) Exprese la elasticidad de la demanda como una función de p.

b) Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio es de 100u.m. explique su respuesta.}

c) Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio es de 50u.m. explique su respuesta.}

d) ¿En qué precio la elasticidad de la demanda es igual a –1? ¿Cuál es la interpretación económica de este precio?

Solución.-

a) $$\eta = -\frac{p}{120 - p}$$

b) $\eta(100) = -5$, esto significa que cuando el precio es de 100u.m; un incremento del 1% en el precio generará una disminución de la demanda en un 5 %.

c($\eta(50) = -0.17$, esto significa que cuando el precio es de 50u.m; un incremento del 1% en el precio generará una disminución del 0.17% en la demanda.

d) La elasticidad de la demanda será igual a –1 cuando

$$-1 = -\frac{p}{120 - p}$$

De donde p = 60 u.m. esto significa que en este precio un incremento del 1% en el precio generara una disminución en la demanda de aproximadamente el mismo porcentaje.

Ejemplo 2.

Suponga que la demanda q y el precio p de cierto articulo están relacionadas mediante ecuación

$$q = 300 - p^2, \text{ para } p \in [0, \sqrt{300}].$$

a) Determinar los intervalos donde la demanda es: elástica, inelástica y de elasticidad unitaria.

b) Utilice los resultados del literal a) para describir el comportamiento del ingreso total como una función del precio.

c) Halle la función de ingreso total en forma explícita y emplee el críterio de la primera derivada para determinar: los extremos relativos, intervalos de crecimiento, decrecimiento y el precio a cuál se maximiza el ingreso.

Ejemplo 3.

La ecuación de la demanda de un cierto artículo es: $q = p^2 - 30p + 225$, para $0 \le p \le 15$.

a) Exprese la elasticidad de la demanda en función del precio p y calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio es 6 u.m. (interprete su respuesta)

b) Determine donde la demanda es: elástica, inelástica y de elasticidad unitaria con respecto al precio

Solución

a) La elasticidad de la demanda en función del precio p esta dado por

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \text{ entonces } \quad \eta = \frac{p(2p-30)}{p^2-30p+225}$$

$$\eta(6) = \frac{6(12-30)}{6^2-30(6)+225}$$

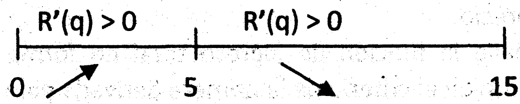
$$\eta(6) = \frac{4}{3} \text{ de donde se tiene que } \eta(6) = 1{,}33$$

Si el precio de de 6u.m. un incremento de 1% en el precio originará un aumento de 1,33% en la demanda

b) El ingreso se define como **R(q) = pq,** de donde se tiene que:

$R(q) = p^3 - 30p^2 + 225p$

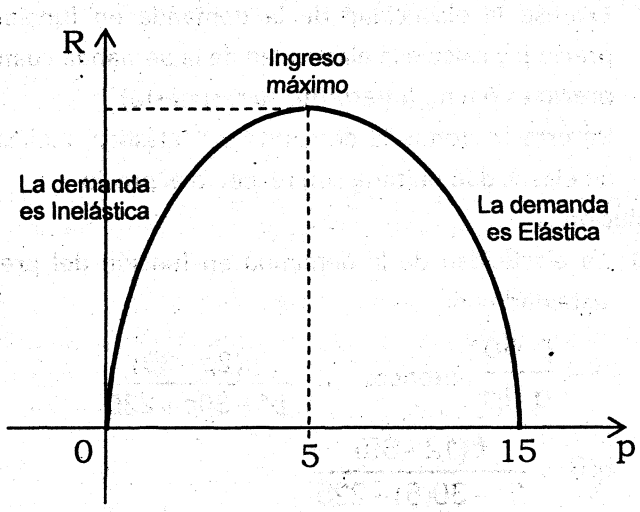
$$R'(q) = 0 \leftrightarrow 3p^2 - 60p + 225 = 0, \text{ de donde } p = 5$$



i) La demanda es elástica con respecto al precio si $5<p<15$.

ii) La demanda es inelástica con respecto al precio si $0<p<5$.

iii) La demanda es de elasticidad unitaria con respecto al precio si $p = 5$.



Ejemplo 4.

Suponga que la demanda q y el precio p de cierto artículo se relaciona mediante ecuación lineal

$$q = 240 - 2p, \quad \text{para } p \in [0,120].$$

a) Exprese la elasticidad de la demanda como una función de p.

b) Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio es de 100u.m. explique su respuesta.

c) Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio es de 50u.m. explique su respuesta.

d) ¿En qué precio la elasticidad de la demanda es igual a – 1? ¿Cuál es la interpretación económica de este precio?

Solución.-

a) La elasticidad de la demanda en función del precio p esta dado por:

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}, \text{ entonces } \eta = -\frac{p}{120-p}$$

b) $\eta(100) = -5$, esto significa que cuando el precio es de 100u.m; un incremento del 1% en el precio generará una disminución de la demanda en un 5 %.

c) $\eta(50) = -0.17$, esto significa que cuando el precio es de 50u.m; un incremento del 1% en el precio generará una disminución del 0.17% en la demanda.

d) La elasticidad de la demanda será igual a –1 cuando

$$-1 = -\frac{p}{120-p}$$

de donde p = 60 u.m. esto significa que en este precio un incremento del 1% en el precio generara una disminución en la demanda de aproximadamente el mismo porcentaje.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

1.- Un objeto que se lanza verticalmente hacia abajo desde la azotea de un edificio, con una velocidad inicial Vo pies/seg, viaja aproximadamente según la ecuación $S = Vot + 16t^2$ pies en t segundos. Si toca el suelo a los 2.5seg. con una velocidad de 110 pies/seg. ¿Cúal es la altura del edificio ?.

Solución

$S = Vot + 16t^2$

$V_f = 110$ pies/seg.

$t = 2.5$ seg.

$V_f = Vo + 32t.$

$110 = Vo + 32(2.5)$

$Vo = 30$

$S = 30.25 + 16(2.5)^2 \rightarrow S = 175$ pies.

2.- Se bombea aire a un globo, de modo que su volumen se incrementa en 200 cm^3/seg. Despreciando la compresión del aire. ¿A qué ritmo crece el radio cuando el diámetro llega a 30 cm.?

Solución

Sabemos $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V' = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{V\prime}{4\pi r^2}\text{ , entonces } \frac{200}{4\pi(15)^2} cm/seg$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{90} cm/seg$$

3.- Sobre una pila de forma constante cónica cae arena a razón de 3 pies cúbicos por minuto supóngase que el diámetro en la base del montón es siempre tres veces su altura. ¿A qué velocidad está aumentando su altura cuando ésta a llegando a los 4 pies?

Solución.

V' = 3 pies₃/min
d = 3h
r = 3/2h
h = 4 pies.

Sabemos que

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{3}{2}h)^2 h, \text{ entonces } V = \frac{4}{3}\pi h^3$$

$$V' = \frac{3}{4}\pi(3h^2)\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{30h^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{12h}\text{pies/min}$$

4.- La posición de una partícula que se mueve sobre una recta coordenada está dado por $y = f(t) = 3t^4 - 20t^3 + 36t^2$ donde y se mide en metros y t en segundos.

a) Determinar la velocidad en el instante t.

b) Determinar los intervalos para t donde la velocidad cambia de signo.

c) Determinar la aceleración de la partícula y estudiar su signo.

Solución.

a) $V = \frac{dy}{dt} = 12t^3 - 60t^2 + 72t$

b) Encontrar los puntos críticos:

$V = 0$, $12t^3 - 60t^2 + 72t = 0$

$t(t^2 - 5t = 6) = 0$

$t(t-3)(t-2) = 0 \rightarrow t = 0, \; t = 2 \; t = 3$

Con estos valores obtenemos los intervalos
$\langle 0,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,\infty\rangle$

Intervalo	$\langle 0,2\rangle$	$\langle 2,3\rangle$	$\langle 3,\infty\rangle$
Signo	+	−	+

c) $a = \dfrac{dV}{dt} = 36t^2 - 120t + 72 = 12(3t^2 - 10t + 6)$

$a > 0$ en el intervalo: $\langle 0,2\rangle \cup \langle 3,+\infty\rangle$
$a < 0$ en el intervalo: $\langle 2,3\rangle$

5.- Si el agua está siendo evacuado a una piscina y V galones es el volumen de agua en la piscina t minutos después de comenzar a evacuarse, donde V está dado por $V = 250(40 - t)^2$, ¿Qué tan rápido fluye el agua de la piscina 5 minutos después de que comienza a salir?.

Solución.

$$\frac{dV}{dt} = 500(40-t)(-1)$$

$$\frac{dV}{dt} = 500(40-5)(-1)$$

$$\frac{dV}{dt} = -17500 \text{ gal/min}$$

6.- Un gato que vá a una velocidad de 1.2 m/seg. por la calle pasa a 0.9 m de un poste que soporta una lámpara a 3.60 m. sobre el gato; ¿A qué velocidad aumenta la distancia gato-lámpara un segundo después de haber pasado el poste?.

Solución.

$$V=\frac{dz}{dt}=1.2\,m/s$$

x = 0.9 m. , h = 3.6 m. , t = 1 seg.

$$\frac{dy}{dt}=?$$

$$V=\frac{z}{t}, \qquad z=t\,\frac{dz}{dt}$$

z = 1.2x1m.

z = 1.2 m.

$w^2 = z^2 + x^2$

$w^2 = (1.2)^2 + (0.9)^2$

w = 1.5 m.

$$w\frac{dw}{dt}=z\frac{dz}{dt}\rightarrow\frac{dw}{dt}=\frac{(1.2)(1.2)}{1.5}m/s$$

$$y^2=w^2+h^2\frac{dy}{dt}\rightarrow\frac{w}{y}=z\frac{dw}{dt}=\frac{(1.5)(1.2)}{3.9}\frac{1}{1.5}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{(1.2)^2}{3.9}\approx 0.37\,m/s$$

$y^2 = (1.5)^2 + (3.6)^2$

y = 3.9 m.

7.- Una piscina tiene 25m. de ancho, 40m. de largo y 3m. de profundidad en un extremo y 9 metros en el otro, siendo el fondo un plano inclinado. Si se bombea agua al interior de la piscina a razón de $10m^3$/seg. ¿A qué velocidad se está elevando el nivel del agua cuando tal nivel es de 4m. en el extremo más profundo?.

Solución.

x = 40m.

y = 9m.

z = 25m.

$$\frac{dy}{dt} = 10m^3/u$$

$$w = \sqrt{6^2 + 40^2} = 2\sqrt{9+400}$$

$$w = 2\sqrt{409}$$

$$\frac{m}{x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \to m = \frac{2}{3}x$$

$$m = \frac{2}{3}(40) \to m = \frac{80}{3}$$

$$V = \frac{mzy}{2} \to \frac{1}{2}(mz + my + zy)\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$w^2 = y^2 + m^2 \to w\frac{dw}{dt} = (y+m)\frac{dy}{dt}$$

$$w\frac{dw}{dt} = \frac{(y-m)2\frac{dy}{dt}}{mz} + my + yz - \frac{dw}{dt}$$

$$= \frac{2\left(4 + \frac{80}{3}\right)10}{2\sqrt{409}\left(\frac{80}{3} - 25 + \frac{80}{3}.4 + 4.25\right)}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{92x10}{\sqrt{409}(8x25 + 8x4 + 12x25)} = \frac{92}{262\sqrt{409}} = 0.017m/s$$

8.- Un tendero de alambres trepa a un poste telefónico a razón de 2.5 m/seg, mientras su jefe está sentado a la sombra de un árbol vecino observándolo. Si el terreno es llano y el jefe está a 36m. de la base del poste. ¿Cuántos segundos tiene que trepar el tendero de alambres para que la distancia entre él y el jefe crezca a razón de un m/seg.

Solución.

$$z^2 = y^2 + x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 2.5 m/s$$

$$x = 36 \text{ m.}$$

$$\frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/s}$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}$$

$$z\frac{dz}{dt} = y\frac{dy}{dt}, \text{ entonces } z = \frac{5}{2}y$$

$$\left(\frac{5}{2}y\right)^2 = y^2 + x^2$$

$$\frac{25}{4}y^2 - y^2 = x^2$$

$$\frac{21}{4}y^2 = x^2$$

$$y^2 = \frac{4}{21}x^2, \text{ de donde } y = \frac{2x\sqrt{21}}{21}$$

$$y=\frac{2(36\sqrt{21})}{21}=\frac{24}{7}\sqrt{21}$$

$$t=\frac{y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{24}{7}\sqrt{21}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$t=\frac{48\sqrt{21}}{35}-6.28\text{ seg.}$$

9.- Una escalera de 4m. de largo se apoya contra un muro vertical; la base empieza a deslizarse a razón de 0,25 m/seg. ¿A qué velocidad cae la parte superior de la escalera cuando la base está a 1.50 m. del muro ?.

Solución.

$$\frac{dx}{dt}=0.25\text{ m/seg}$$

$$\frac{dy}{dt}=?$$

$x = 1.5$ m.

$$2y\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

$y^2 = 16 - x^2$

10.- la altitud bruta anual de las empresas chocolates t años después del primero de enero de 1990, es p millones de soles y $p = 2/5t^2 + 2t + 10$. Hallar la taza a la cual estuvo cambiando la utilidad bruta del primero de enero de 1992 y determinar la taza a la cual cambiará la utilidad bruta el primero de enero de 1996.

Solución.

$$p = 2/5t^2 + 2t + 10.$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{4}{5}t + 2$$

Para $p = 2$: $\frac{dp}{dt} = 3.6$

Para $p = 6$: $\frac{dp}{dt} = 6.8$

11.- Se echa agua a razón de $30cm^3/seg.$ en una copa cónica de 10 cm. de altura y de un radio igual a la mitad de la altura de cualquier nivel ¿ A qué velocidad está subiendo el nivel de la altura cuando está 2 cm. por debajo del borde ?.

Solución.

$r = 5$

$h = 10$ cm.

$$\frac{dv}{dt} = 30 \text{ cm}^3/\text{seg.}$$

$h = 8$ cm., $r = 4$

$$\frac{dh}{dt} = 2\frac{dr}{dt}$$

$$h = 2r \rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = 2\frac{dr}{dt}$$

$v = \pi/3\ r^2h$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{3} x\, rh\frac{dr}{dt} + \frac{\pi}{3}r^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{3} x\, rh\frac{dh}{dt}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}r^2\frac{dh}{dt}$$

$$= \frac{\pi}{3}r(h + \frac{r}{3})\frac{dh}{dt}$$

$$30 = \frac{\pi}{3}4(h + \frac{4}{3})\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{45x3}{2(24+4)} = \frac{45x3}{2x28} = \frac{135}{56}\ \text{cm/seg.}$$

12.- Se estima que dentro de x meses la población de nuestra comunidad será: $P(x) = x^2 + 20x + 800$

a) ¿Cuál es la razón de cambio de la población con respecto a tiempo?

b) ¿En cuánto cambiará realmente la población durante el mes número 16?

Solución.

a) La razón de cambio de a población con respecto al tiempo será P'(x) entonces.

$P'(x) = 2x + 20$

b) Cambio de población durante el mes 16 = P(16) –P(15) entonces P(16) –P(15) = 51 personas.

13.- El PBI en el Perú está dado por $P(t) = t^2 + 5t + 106$ de millones de dólares, t años después 1990.

a) A qué razón cambia e PBI con respecto al tiempo en 1998.

b) A qué razón porcentual cambia el PBI con respecto al tiempo en 1998

Solución.

$P'(x) = 2t + 5$ entonces $P(8) = 21$ millones de dólares al año.

La razón de cambio del PBI en 1998 $= 100\frac{P'(8)}{P(8)}$

$= 10\ \%$ anual

14.- El fenómeno del niño en el Perú ocasiona una pérdida diaria en miles de dólares a partir del inicio de fenómeno de $P(t) = 60t^2 - 1/3t^3$ miles de dólares calcular:

a) La taza de pérdida en miles de dólares por día.
b) Cuándo la pérdida por causa del fenómeno se propaga a razón de 2700 millones diarias.
c) Cuánto tiempo durará el fenómeno del niño en el Perú.

Solución.

a) $P(t) = 60t^2 - \frac{1}{3}t^3$ entonces

$P'(t) = 120t - t^2$

b) Si $P'(t) = 2700$ entonces $2700 = 120t - t^2$ de donde $t = 330$ días ó $t = 90$ días.
c) Si $P'(t) = 0$ entonces $120t - t^2 = 0$ de donde el fenómeno de niño en el Perú durará $t = 120$ días.

15.- Una epidemia de fiebre aftosa ataca a los animales de la sierra los Zootecnistas estiman que el número de animales afectados con la fiebre aftosa en el tiempo t (medido en días a partir del inicio de la epidemia) es aproximadamente $P(t) = 60t^2 - t^3$, tomando en cuenta que $0 \leq t \leq 40$.

a) A qué razón se propaga la fiebre cuando t=20
b) Cuándo se propaga la fiebre a razón de 900 animales por día.

Solución.

a) $P'(t) = 120t - 3t^2$ entonces $P'(20) = 1200$ animales por día.

b) Si $P(t) = 900$ entonces
$900 = 120t - 3t^2$
de donde $t = 10$ días ó $t = 30$ días.

16.- El ingreso semanal total R (en dólares) obtenido en la producción y venta de x kilos de queso está dado por: $R(x) = 500x - 2x^2$. Determinar la taza promedio de ingreso por kilo extra cuando el número de kilos de queso producida y vendidas por semana se incrementa de 100 a 120 kilos.

Solución.

$$\text{La tasa de cambio promedio} = \frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{R(x_1 + \Delta x) - R(x_1)}{\Delta x}$$

$x_1 = 100$, $x_2 = 120$. $R(x) = 500x - 2x^2$

$\Delta x = x_2 - x_1 = 120 - 100 = 20$

$\Delta R = R(120) - R(100) = 31200 - 30000$

$\Delta R = 1200$

La tasa de cambio Promedio es $\dfrac{\Delta R}{\Delta x} = \dfrac{1200}{20} = 60$

kilos de queso por semana

17.- Cuando una peluquería fija una cuota de \$4 por corte de cabello advierte que el número de clientes que atiende en una semana es de 100 en promedio. Al elevar la tarifa a \$5 el número de clientes por semana baja o 80. Suponiendo una ecuación de demanda lineal entre el precio y el número de clientes determine la función de ingreso marginal. Encuentre entonces el precio que produce un ingreso marginal igual a cero.

Solución.

x=4 soles $\rightarrow$ p = 100

x=5 soles $\rightarrow$ p = 80

p= ax + b, R'(x)=? y

R'(x) = 0 $\rightarrow$ x = ?

100 = 4a + b

80 = 5a + b

a = −20 b = 180

p = −20x + 180 $\dashrightarrow$ R(x) = x (180 = 20)

R'(x) 180 − 40x

R'(x) = 0 $\rightarrow$ 180 − 40x = 0

x = 4.5 soles.

18.- El editor de una revista descubre que si fija un precio de $1 a su revista, vende 20000 ejemplares al mes; sin embargo, si el precio fijado es de $1.50 sus ventas sólo serán de 15,000 ejemplares.

El costo de producir cada ejemplar es de $0.80 y tiene costos fijos de $10000 al mes. Suponiendo una ecuación de demanda lineal calcule su función de utilidad marginal y determinar el precio de la revista que haga la utilidad marginal igual a cero.

Evalué la utilidad misma cuando el precio es:

a) $1.80 b) $1.90 c) $2.00

Solución.

x = 1 p = 20000

x = 1.50 p = 15000

C(x) = 0.80x + 10000

p = ax + b

U'(x) = ? u"(x) = 0 $\dashrightarrow$?

20000 = a + b

15000 = 1.5a + b

$a = -10000$
$b = 30000$
$p = 30000 - 10000x$
$U = 30000x - 10000x^2 - 0.8x - 10000$
$U' = 29999.2 - 20000x$
$U' = 0 \quad x = 1.49999$
$U(1.80) = 11548.56$
$U(1.90) = 10898.48$
$U(2) = 9998.40$

19.- El fenómeno del niño ocasiona en el Perú una perdida diaria en miles de dólares a partir del inicio del fenómeno de $P(t) = 60t^2\text{-}1/3t^3$ miles de dólares calcular.

a.- La tasa de pérdida en miles de dólares por día.

b.- ¿Cuándo la pérdida por causa del fenómeno se propaga a razón de 2700 millones diarias?

c.- ¿Cuánto tiempo durará el fenómeno del niño en el Perú?

Solución.

a) $P(t) = 60t^2-1/3t^3$
entonces $P'(t) = 120t - t^2$

b) $2700 = 120t - t^2$
$t = 90$ días ó $t = 30$ días.

c) $P'(t) = 0$ entonces $t^2-120t = 0$, de donde $t = 120$ días de duración.

20.- El costo total en dólares de fabricar p unidades de panetones es:
$C(p) = 3p^2 + p + 500'$

a.- Emplee el análisis marginal para estimar el costo de fabricación de la unidad número 410.

b.- Calcule el costo real de fabricación 410 unidades.

Solución.

a) $C'(p) = 6p + 1$

$C'(410)-C'(409)=6x410+1-6x409-1$

$= 6$ dólares.

b) $C(410) - C(409) = y$

$y = 3x410^2+410+500-3x409^2-409-500$

$C(410) - C(409) = 2458$ dólares.

21.- Una cebichería determina que el precio de un plato de cebiche es S/. 5 y se estima un promedio de asistencia de 200 clientes por día. Mientras que si lo vende a S/. 7 el número promedio de clientes bajará a 100. Determinar la relación de demanda suponiendo que es lineal. Encuentre el precio que maximice el ingreso.

Solución.

(5,200) y (7,100)

$$p-200=-\frac{100}{2}(x-5)$$

$p = 450 - 50x$

$R(x) = 450x - 50x^2$

$\rightarrow R'(x) = 450 - 100x$

$x = 4.5$ Soles.

22.- Una compañía fabrica microscopios para laboratorio, iniciar cada producción cuesta \$.2500. El segura cobra \$20 al año por cada microscopio y basándose en el número promedio de microscopios en bodega. Los costos de almacenamiento que se basan en el número máximo de microscopios en bodega asciende a \$15 por microscopio al año. Suponga que la compañía espera vender 1600 microscopios a una tasa uniforme durante el año. Determine el tamaña de cada producción que minimizará los costos de inventario de la compañía.

Solución.

$$\text{Costo} = \begin{array}{c}\text{Costo}\\ \text{seguro}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Costo de}\\ \text{almacenamiento}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Costo de}\\ \text{producción}\end{array}$$

Costo = 20(x/2) + 15x + 2500(1600/x)

$$C'(x) = 25\left(1 - \frac{160000}{x^2}\right) = 0$$

x = 400

r = 4 número de jornadas.

23.- La firma Vinibol espera vender 10000 cajas de pelotas de tenis a razón constante el próximo año. Los costos anuales de mantenimiento que se deben calcular de acuerdo con el promedio de cajas almacenadas durante el año son de $10 por caja y el costo por hacer un pedido al fabricante es de $80.

a) Determine la cantidad óptima del pedido.

b) El costo de inventario si ordena 500 cajas a la vez durante el año.

Solución.

a) $$\text{Costo} = \begin{array}{c}\text{Costo de}\\ \text{almacenamiento}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Costo de}\\ \text{pedido}\end{array}$$

Costo = 10(x/2) + 80(10000/x)

$C'(x) = 5 - 800000/x^2 = 0$

x = 400 es el tamaño económico del lote.

b) $x = 500$ entonces $r = 20$

$C = 5x + 80r$

$= \$4100$

24.- DATA-INCA fabrica computadoras para el Centro de Cómputo de la UNSAAC. Iniciar cada producción cuesta 8100 dólares. El seguro cobra $20. por cada computadora en bodega, los costos de almacén que se basa en el número máximo de computadoras en bodega asciende a $26 por computadora al año. DATA-INCA espera vender 1600 computadoras a una tasa uniforme durante el año. Determine el tamaño de cada producción que minimizara los costos de inventario de DATA-INCA.

Solución.

Costo de producción = $8100r$

Costo de seguro = $20(x/2)$

Costo de almacenamiento = $26x$

$r = \dfrac{1600}{x}$ entonces costo inventario es

$C = 8100\dfrac{1600}{x} + 10x + 26x$, entonces $C'(x) = -\dfrac{8100(1600)}{x^2} + 36x$

$C'(x) = 0$ entonces $x = 600$ computadoras

25.- Un material se demanda a una tasa de 10000 unidades por año; el precio al costo del material es de $2. por unidad; el costo de volver a llenar el almacén del material por orden, sin importar el tamaño de la orden x, es de $400 por orden; el costo de almacenamiento del material por un año es de 10% del valor de la existencia (x/2). Determinar el costo anual de acomodar y tener almacenado el material y encuentre el tamaño económico de lote.

Solución.

Costo de Producción = 10000(2) = 20000

Costo de pedido = $(40)\dfrac{10000}{x} = \dfrac{400000}{x}$

Costo de almacenamiento = $\dfrac{10}{100}\dfrac{x}{2}$

$$C(x) = \frac{x}{20} + \frac{400000}{x} + 20000$$

$$C'(x) = \frac{1}{20} - \frac{400000}{x^2} = 0$$

$x = 2000\sqrt{2} \approx 2828.4$

Optimizando el precio

x = 2828

C(x) = 22882(84) dólares

x = 2829

C(x) = 20292(8)

Tamaño económico x = 2829

26.- Una llantera espera vender 600000 llantas de cierto tamaño y calidad durante el próximo año. Las ventas mes a mes son las mismas a la compañía le cuesta $15000 en pesar cada producción. Los costos de mantenimiento basados en el número promedio de llantas almacenadas son de $5 al año por llanta.

a) Determine los costos si hay 10 producciones durante el año.

b) Encuentre el tamaño óptimo del lote.

Solución.

a)

Costo = Costo de almacenamiento + Costo de producción

Costo de producción = 10(15000)
= 150000

Costo de almacenamiento = $5(\frac{x}{2})$

$\frac{x}{2} = \frac{60000}{2}$ entonces x = 60000

costo = 30000

b) $C(x) = \frac{5x}{2} + 15000(\frac{600000}{x})$ entonces C' = 0, de donde x = 60000

27.- Una librería está tratando de determinar a cantidad óptima de pedido para un libro de mucho éxito la librería vende 8000 copias de libro al año. El costo por hacer cada nuevo pedido de libros es $40. El costo de mantenimiento es de $2 por libro que se aplica al número máximo de inventario durante el periodo entre pedidos. ¿Cuántas veces al año se deben hacer los pedidos?

Solución.

Costo de pedido = 40r; $r = \frac{8000}{x}$

Costo de mantenimiento = 2x

C(x) = 2x + 40r

C'(x) = 0 de donde x = 400

r = 20 veces debe hacerse el pedido.

28.- La Mueblería San Antonio, que construye y vende escritorios, opera en condiciones de competencia perfecta y puede vender todos los escritorios que produce a un precio de 400 dólares por escritorio. Si se producen x escritorios y se venden cada semana, y C(x) dólares es el costo total de producción semanal, entonces

$$C(x) = 2x^2 + 80x + 6000$$

a) Determine cuantos escritorios deben producirse semanalmente para que el fabricante obtenga la máxima ganancia total semanal.

b) ¿Cuál es la ganancia total semanal?

c) Grafique la función utilidad

Solución.

a) Utilidad = (Ingreso total)- (costo total)

$U(x) = 400x-(2x^2 + 80x + 6000)$

$U(x) = - 2(x^2 - 160x + 3000)$ entonces $U'(x) = -4(x - 80)$

$U'(x) = 0 \leftrightarrow x = 80$

Se venden 80 escritorios semanalmente para obtener una máxima ganancia.

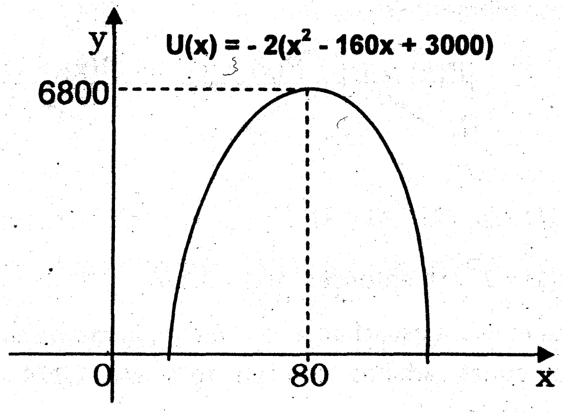
b) ¿Cuál es la ganancia total semanal?

$U(80) = - 2\{80^2 - 160(80) + 3000\}$

$U(80) = 6800.$

La ganancia total máxima es de 6800dolares

c) Grafique la función utilidad



29.- Una estación de radio que sólo emite noticias ha realizado una encuesta sobre los hábitos de escucha de los residentes locales entre las 5:00 pm y la media noche. La encuesta revela que el porcentaje de población adulta local que sintoniza la estación x horas después de las 5:00 pm. es:

$$f(x) = (5-x)^{2/3}(1+x)^{1/3}$$

Solución.

$f(x) = (5-x)^{2/3}(1+x)^{1/3}$

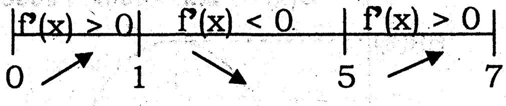
$$f'(x) = -\frac{2\sqrt[3]{1+x}}{3\sqrt[3]{5-x}} + \frac{\sqrt[3]{(5-x)^2}}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt[3]{(5-x)(1+x)^2}}$$

Los puntos críticos son: P.C.= $\{0,1,5,7\}$

a. ¿En qué momento, entre las 5:00 pm. y la medianoche, escucha la emisora el mayor número de personas? y

¿qué porcentaje de la población escucha la emisora en ese momento?



$f(1) = (5 - 1)^{2/3}\,(1 + 1)^{1/3}$

$f(1) = 2\sqrt[3]{4}$ entonces $f(1) = 3{,}174$

La emisora escuchan a las 16 p.m. la mayor cantidad de personas adultas con un total de 3,174 % de la población.

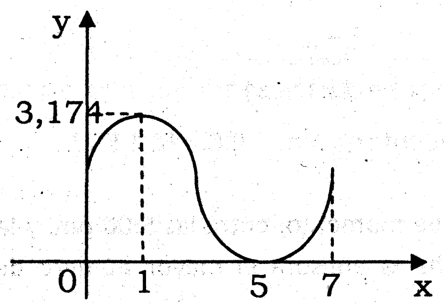
b. ¿En qué momento, entre las 5:00 pm. y la medianoche, escucha la emisora el menor número de personas? y ¿qué porcentaje de la población escucha la emisora en ese momento?

$f(5) = (5 - 5)^{2/3}\,(1 + 5)^{1/3}$

$f(5) = 0$

La emisora escuchan a las 10 p.m. la menor cantidad de personas adultas con un total de 0 % de la población.

c. Grafique la función f(x)



30. Una empresa produce y vende anualmente **10000** unidades de un artículo. Las ventas están distribuidas uniformemente a lo largo del año. La empresa desea determinar el número de unidades que deben fabricarse en cada periodo de producción para minimizar los costos totales anuales de operación y los costos de inventario. Se producen el mismo número de unidades en cada periodo. El costo de producir cada unidad es de **200** dólares y los costos de inventario se estiman iguales al 10% del valor del inventario promedio. Los costos de operación por periodo de producción son 40 dólares. Determinar el tamaño económico del lote.

Solución.

$$\text{Costo total} = \text{Costo de pedido} + \text{Costo de mantenimiento} + \text{Costo de producción}$$

$$C(x) = 40\frac{10000}{x} + \frac{10}{100}\frac{x}{2}(200) + 200(10000)$$

$$C(x) = \frac{400000}{x} + 10x + 2000000$$

$$C'(x) = -\frac{400000}{x^2} + 10 = 0$$

$$x^2 = 40000 \text{, entonces}$$

$$x = 200$$

El lote económico es de 200 unidades

VIII EJERCICIOS

I.- Elasticidad.

1. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es $q = 60 - 0.1p$ (para $0 \leq p \leq 600$).

a) Exprese la elasticidad de la demanda como una función de p.

b) Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio es p = 200. Explique su respuesta.

c) ¿A qué precio la elasticidad de la demanda es igual a – 1?

2. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es $q = 200 - 2p^2$ (para $0 \leq p \leq 10$.)

a) Exprese la elasticidad de la demanda como una función de p.
b) Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio es p = 6. Explique su respuesta.
c) ¿A qué precio la elasticidad de la demanda es igual a – 1?

3. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es q= 500 – 2p (para (para $0 \leq p \leq 250$.)

a) Determine dónde la demanda es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria con respecto al precio.
b) Emplee los resultados del literal a) para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de ingreso y el precio al cual se maximiza el ingreso y el precio al cual se maximiza el ingreso.
c) Halle la función de ingreso total en forma explícita y utilice la primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y el precio al cual se maximiza el ingreso.
d) Trace las gráficas de las partes relevantes de las funciones de demanda y de ingreso.

4. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es $q = 120 - 0.1p^2$ (para $0 \le p \le \sqrt{1{,}200}$).

a) Determine dónde la demanda es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria con respecto al precio.

b) Utilice los resultados del literal a) para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de ingreso y el precio al cual se maximiza el ingreso.

c) Halle la función de ingreso total en forma explícita y emplee la primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y el precio al cual se maximiza el ingreso.

d) Elabore las gráficas de las partes relevantes de las funciones de demanda y de ingreso.

5. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es $q = \dfrac{a}{p^m}$, donde a y m son constantes positivas. Demuestre que la elasticidad de la demanda es igual a $-m$ para todos los valores de p. Explique este resultado.

6. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es lineal, es decir $q = b - ap$ (para $0 \le p \le \dfrac{b}{a}$), donde a y b son constantes positivas.

a) Exprese la elasticidad de la demanda como una función de p.

b) Demuestre que la demanda es de elasticidad unitaria en el punto intermedio ($p = \dfrac{b}{2a}$) del intervalo pertinente $0 \le p \le \dfrac{b}{a}$.

c) Halle los intervalos en los cuales la demanda es elástica o inelástica.

d) Halle la función de ingreso total en forma explícita y emplee la primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Trace las gráficas de las partes relevantes de las funciones de demanda y de ingreso.

7. Suponga que la demanda q y el precio p de cierto artículo están relacionados por la ecuación $p = 60 - 2q$ (para $0 \leq q \leq 30$).

a. Exprese la elasticidad de la demanda como una función de q.

b. Calcule la elasticidad de la demanda cuando q= 10. Explique su respuesta.

c. Sustituya q en la fórmula del literal a) para expresar la elasticidad de la demanda como una función de p.

d. Emplee la definición inicial de η para expresar la elasticidad de la demanda como una función de p. [La respuesta debe ser la misma del literal c)].

8. Demuestre que la derivada del ingreso total R con respecto a la demanda q es

$$\frac{dR}{dq} = p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)$$

(Sugerencia : Al igual que en la obtención suministrada en el texto, comience con la ecuación R = pq, pero esta vez derívela con respecto a q).

9. Utilice la fórmula obtenida en el problema 8 para demostrar que el ing $|\eta|$ R es una función creciente de la demanda q cuando $|\eta| <1$.

10. Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es $p = 600 - 2q^2$ (para $0 \leq q \leq \sqrt{300}$).
Exprese la elasticidad de la demanda como una función de q y determine dónde $|\eta| = 1$, $|\eta| < 1$ y $|\eta| > 1$.

II.- APLICACIONES COMERCIALES

1. Suponga que el costo, en dólares, de fabricar q unidades de cierto artículo es

$$C(q) = 3q^2 + 5q + 75$$

a) ¿En qué nivel de producción es mínimo el costo medio por unidad?
b) ¿En qué nivel de producción el costo medio por unidad es igual al costo marginal?
c) En el mismo conjunto de ejes, trace la gráfica de las funciones de costos medio y marginal para $q > 0$.

2. Suponga que el costo total, en dólares, de fabricar q unidades de cierto artículo es

$$C(q) = q^3 + 5q + 128$$

a) ¿En qué nivel de producción es mínimo el costo medio por unidad?
b) ¿En qué nivel de producción el costo medio por unidad es igual al costo marginal?
c) En el mismo conjunto de ejes, trace la gráfica de las funciones de costos medio y marginal para $q > 0$.

3. Suponga que el ingreso total en dólares de la venta de q unidades de cierto artículo es

$$R(q) = -2q^2 + 68q - 128$$

a) En qué nivel de ventas el ingreso medio por unidad es igual al ingreso marginal?
b) Verifique que el ingreso medio sea creciente si el nivel de ventas es inferior al nivel del literal a) y decreciente si el nivel de ventas es superior al del literal a).
c) En el mismo conjunto de ejes, elabore las gráficas de las partes relevantes de las funciones de ingresos medio y marginal.

4. Un fabricante encuentra que en la producción diaria de x unidades (para o< x < 100,000) se involucran tres tipos de costos:

a) Un costo fijo de $1200 en salarios
b) Un costo de producción de $1.20 por cada unidad fabricada.
c) Un costo de solicitud de $\frac{100}{x^2}$ dólares
d) Exprese el costo total como una función de x y determine el nivel de producción que genera el costo mínimo total.

5. Suponga que x años después de su fundacio en 1978, cierta asociación nacional de consumidores tenia un total de $f(x) = 100(2x^3 - 45x^2 + 264x)$ miembros.

a) ¿En qué momento, entre 1978 y 1992, fue mayor el número de miembros de la asociación? ¿Cuántos eran los afiliados en ese momento?
b) ¿En qué momento, entre 1978 y 1992, fue menor el número de miembros de la asociación? ¿Cuántos eran los afiliados en ese momento?

6. Una estación de radio que sólo emite noticias ha realizado una encuesta sobre los hábitos de escucha de los residentes locales entre las 5:00 p.m. y la medianoche. La encuesta revela que el porcentaje de población adulta local que sintoniza la estación x horas después de las 5:00 p.m. es

$$f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240).$$

a) ¿En qué momento, entre las 5:00 p.m. y la medianoche, escucha la emisora el mayor número de personas? ¿Qué porcentaje de la población escucha la emisora en ese momento?

b) ¿En qué momento, entre las 5:00 p.m. y la medianoche, escucha la emisora el menor número de personas? ¿Qué porcentaje de la población escucha la emisora en ese momento?

7. Un fabricante puede producir radios a un costo de \$5 cada uno y estima que si se venden a x dólares cada uno, los consumidores comprarán $20 - x$ radios por día. ¿A qué precio debe el fabricante vender los radios para maximizar la utilidad?

8. La función de demanda de cierto artículo es $D(p) = 160\text{-}2p$, donde p es el precio a que se vende el artículo. ¿A qué precio es mayor el gasto de consumo total del artículo?

9. Un almacén de estampas de béisbol puede obtener las del novato Mel Schlabotnik a un costo de US\$5 cada una. El almacén ofrece las estampas a US\$10 cada una y, a este precio, ha vendido 50 por mes. El almacén planea bajar el precio para estimular las ventas y estima que por cada 50 centavos de reducción en el precio se venderán 5 estampas más cada mes. ¿A qué precio debería venderlas el almacén para maximizar la utilidad total mensual?

10. Un minorista puede obtener cámaras del fabricante a un costo de US\$50 por unidad. El minorista vende las cámaras a

un precio de US$80 cada una y, a este precio, los consumidores han comprado 40 cámaras al mes. El minorista planea bajar el precio para estimular las ventas y estima que por cada US$5 de reducción en el precio se venderán 10 cámaras más cada mes. ¿A qué precio debería el minorista vender las cámaras para maximizar el rendimiento total?

11. Para reunir dinero un club de servicios recoge botellas usadas para venderlas a una compañía local recicladora de vidrio. Como el proyecto comenzó hace 80 días, el club ha recolectado 24,000 libras de vidrio. La compañía ofrece en la actualidad 1 centavo por libra. Sin embargo, debido a que las botellas se acumulan con mayor rapidez de lo que pueden reciclarse, la compañía planea reducir en 1 centavo cada día el precio que pagará por 100 libras de vidrio. Suponga que el club puede continuar la recolección de botellas al mismo ritmo y que los costos de transporte impiden que la compañía haga más de un viaje. ¿Cuál es el momento más beneficioso para que el club concluya su proyecto y entregue las botellas?

12. Se tenderá un cable desde una central eléctrica situada en un lado de un río de 1,200 m de ancho hasta una fábrica, en el otro lado, 1,500 m río abajo. El costo de tender el cable bajo el agua es US$25 por metro, mientras que el costo sobre tierra es US$20 por metro. ¿Cuál es la ruta más económica sobre la cual tender el cable?

13. Una empresa de plásticas ha recibido un pedido del departamento de recreación de la ciudad para fabricar 8,000 tablas de plástico para su programa veraniego de natación. La empresa posee 10 máquinas, cada una de las cuales puede producir 30 tablas por hora. El costo de puesta en marcha de las máquinas para producir las tablas es US$20 por máquina. Una vez puesta en marcha las máquinas, la operación es totalmente automatizada y puede ser vigilada por un solo supervisor de producción que gana US$4.80 por hora.

c) ¿Cuántas máquinas deberían emplearse para minimizar el costo de producción?
a. ¿Cuánto ganará el supervisor durante la jornada de producción si se utiliza el número óptimo de máquinas?
b. ¿Cuánto costará poner en marcha el número óptimo de máquinas?

14. Una empresa de transporte alquila su flota para grupos de personas en no menor de 200. La tarifa es de S/.8,00 si viajan 200, y se reduce en 10 céntimos por cada pasajero adicional. ¿Cuántos pasajeros reportará mayor ingreso para la empresa?

15. Sea p el precio de un cierto artículo e y el número de ellos que se venden a ese precio, donde
$y = 250 - p$, para $0 \leq p \leq 250$. Si la producción de
y unidades de dicho artículo cuesta $100 + 10y$ nuevos soles, ¿A qué precio debe venderse cada artículo para optimizar el beneficio?

16. Un contratista que está removiendo tierra de una gran excavación, puede conducir sus volquetes por dos carreteras distintas. Hay 10 000 m^3 de tierra por remover y cada volquete carga 10 m^3. Por una carretera el costo por cada carga es $1 + 2x^2$ céntimos, y por la otra es $2 + x^2$ céntimos, siendo x el número de volquetes que pasan por cada ruta. ¿Cuántos volquetes deben pasar por cada ruta para optimizar costos?

17. Una llantera espera vender 600 000 llantas de cierto tamaño y calidad durante el próximo año. Las ventas mes a mes son las mismas a la compañía le cuesta US$15000 en pesar cada producción. Los costos de mantenimiento basados en el número promedio de llantas almacenadas son de US$5 al año por llanta.

a) Determine los costos si hay 10 producciones durante el año.

b) Encuentre el tamaño óptimo del lote.

18. Una librería está tratando de determinar la cantidad óptima de pedido para un libro de mucho éxito. La librería vende 8000 copias de libro al año. El costo por hacer cada nuevo pedido de libros es US$40. El costo de mantenimiento es de US$2 por libro que se aplica al número máximo de inventario durante el período entre pedidos. ¿Cuántas veces al año se deben hacer los pedidos?

BIBLIOGRAFÍA

- Cálculo: Laurence D. Hoffnan - Gerldl. Bradley
- Cálculo y sus aplicaciones: Larry J. Goldtein / David C-Lay
- Cálculo V - I: Larson / Hostetrer / Edwards
- Cálculo Diferencial - Cálculo integral: Moisés Lázaro Carrión
- Limites y Continuidad: Moisés Lázaro Carrión
- Tópicos de Cálculo V - I: Máximo Mitac - Luis Toro
- Matemáticas Aplicadas: Arya Lardner
- Matemáticas: Ernestf Hatssler JR. Richards
- Cálculo diferencial: Maynard Kong.
- EL Cálculo: Louis Leithol

ISBN: 978-9972-813-74-0
9 789972 813740